

# LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN COBB – DOUGLAS Y LA ECONOMÍA ESPAÑOLA

José Francisco Bellod Redondo<sup>1</sup>

Universidad Politécnica de Cartagena

*Fecha de recepción: octubre de 2010*

*Fecha de aceptación de la versión final: septiembre de 2011*

## **Resumen**

En este trabajo analizamos el uso creciente del concepto función de producción Cobb - Douglas, basado en la obra de Solow, en trabajos aplicados a la economía española, relacionados con la determinación de la posición cíclica y la contribución de los factores productivos al crecimiento. A tal efecto realizamos una serie de contrastes econométricos para el periodo 1960–2010 que demuestran claramente que la función Cobb - Douglas no refleja la conexión entre producción y factores productivos (no existe tal función de producción agregada para ese periodo), y que su uso combinado con la Nairu distorsiona el análisis de la actividad económica española y, en particular, de la posición cíclica de la economía.

**Palabras clave:** *función de producción Cobb-Douglas, Nairu, economía española.*

## **Abstract**

This study examines the growing use of the concept Cobb - Douglas, based on Solow's work, in work applied to the Spanish economy, related to the determination of the cyclical position and the contribution of production factors to growth. To this end we conducted a series of econometric contrasts for the period 1960-2010 which clearly show that the Cobb - Douglas does not reflect the connection between production and factors of production, and its use combined with the NAIRU distorts the analysis of the Spanish economy and, in particular, its cyclical position.

**Key Words:** *Cobb-Douglas production function, Nairu, Spanish economy.*

<sup>1</sup> bellodredondo@yahoo.com

## INTRODUCCIÓN

La función de producción es, sin lugar a dudas, uno de los conceptos más relevantes en la formación de los economistas y algunos autores consideran que se trata del "meollo" de la economía neoclásica. Su introducción por Wicksteed (1894) en el campo de la microeconomía supuso una revolución en la Teoría de la Producción y la Distribución. Trabajos posteriores permitieron popularizar formas específicas como la Función Cobb - Douglas [Cobb y Douglas (1928), Douglas (1948)], la Función de Leontief [Cassel (1918), Leontief (1941)], la Función de Elasticidad de Sustitución Constante (CES) [Arrow et al (1961)], etc. La irrupción de la Función de Producción en el ámbito de la teoría económica obedecía a un objetivo preciso: contribuir, desde el marginalismo, a explicar la distribución de la renta entre salarios y beneficios dejando a un lado la dialéctica de lucha de clases que subyacía en la teoría del valor - trabajo. El propio profesor Douglas (1976, p. 914) manifestó que la validación econométrica de la famosa función que lleva su nombre constituía una refutación de la teoría marxista. En definitiva, los defensores del concepto "Función de Producción" trataban de aportar una explicación pretendidamente tecnológica, y por tanto incuestionable y políticamente aséptica, a la formación de los salarios y la tasa de beneficios.

Sin embargo, la polémica acerca de su pertinencia no tardó en aparecer. Ya en 1894 Flux realiza una crítica demoledora relativa a las restrictivas condiciones para que la función de producción pudiese ofrecer una explicación coherente de los precios de los factores productivos: sólo la homogeneidad lineal de la función permite que los factores productivos sean retribuidos según su productividad marginal (Flux, 1894). Poco después Hobson (1909) critica el irrealismo de la productividad marginal: una cosa es poder calcular la primera derivada de una función respecto a un factor y otra distinta es que en el mundo real pueda aumentarse el empleo de un factor sin aumentar simultáneamente el uso del otro, con lo cual la productividad adicional no puede imputarse en exclusiva al factor cuyo uso adicional hemos incrementado deliberadamente.

A partir de los años 50, el descrédito de la función de producción se asienta en dos críticas de largo alcance. De una parte, las de quienes sostenían la imposibilidad de medir el capital, como por ejemplo Robinson (1954), dando lugar a la famosa "*Controversia de los dos Cambridge*". De otra la de quienes sostienen la imposibilidad de agregar las funciones de producción individuales para lograr una función agregada representativa del conjunto de la economía: si agregar bienes de capital heterogéneos resultaba absurdo, agregar microfunciones de producción de plantas individuales obligaba a cumplir unos requisitos inviables en la práctica [Felipe y Fisher (2001)]. Esto último en particular se tradujo en una serie de teoremas y trabajos empíricos cuyo impulso original radica en la defensa que hacen Klein (1946 a, b) y Solow (1957) de la función de producción agregada. Tales evidencias empíricas también obtuvieron contestaciones severas, probablemente la más importante de las cuales sea la formulada por Phelps Brown (1957) y Shaikh (1974, 1980, 1987): las regresiones del PIB sobre series de empleo y capital no son una función de producción, no muestran

una relación tecnológica, son una mera identidad contable que muestra cómo la renta se reparte en la retribución de los factores productivos<sup>2</sup>.

Debido a las anomalías acumuladas puede afirmarse que para los años 60 la función de producción Cobb - Douglas había quedado relegada al campo estrictamente académico, como una herramienta al servicio de la formación de los futuros economistas, o para la formulación de modelos estrictamente teóricos. Y ni siquiera de modo pacífico. La eminente profesora Robinson llegó a decir: "... la función de producción ha constituido un poderoso instrumento para una educación errónea. Al estudiante de teoría económica se le enseña a escribir  $q = F(K, L)$  siendo  $L$  una cantidad de trabajo,  $K$  una cantidad de capital y  $q$  una tasa de output de mercancías. Se le alecciona para suponer que todos los trabajadores son iguales y a medir  $L$  en hombres - hora de trabajo; se le menciona la existencia de un problema de números índice en cuanto a la elección de una unidad de output; y luego se le apremia a pasar al problema siguiente, con la esperanza de que se le olvidará preguntar en qué unidades se mide  $K$ . Antes de que llegue a preguntárselo, ya será profesor y de ese modo se van transmitiendo de generación en generación unos hábitos de pensamiento poco rigurosos" (Robinson, 1954)<sup>3</sup>.

No por ello dejaron de producirse denodados esfuerzos por validar empíricamente la función de producción del tipo  $y_t = A_t \cdot L_t^\alpha \cdot K_t^{(1-\alpha)}$ , siendo  $y_t$  el PIB,  $L_t$  la dotación de factor trabajo,  $K_t$  la dotación de capital y  $A_t$  un residuo al que Solow denominó "Productividad Total de los Factores". De hecho, en los últimos tiempos, el concepto "función de producción" ha cobrado un renovado protagonismo (especialmente la función Cobb - Douglas) por razones de carácter instrumental en materia de política económica.

En primer lugar, la función de producción es crecientemente utilizada en los análisis que tratan de determinar la posición cíclica de la economía, esto es, se emplea para estimar el output potencial (es decir, la máxima producción utilizando plenamente los factores disponibles) y el output gap (o brecha de la producción, es decir, la distancia entre la producción efectiva y la potencial). En el caso de la Unión Europea estos trabajos han cobrado gran importancia a raíz de la creación del Banco Central Europeo (BCE) y la unificación de la política monetaria en la zona euro<sup>4</sup>. En el caso de España, este fenómeno vino de la mano de la Ley General de Estabilidad Presupuestaria de 2006, que vincula el objetivo de déficit público contenido en los Presupuestos de las distintas Administraciones a la posición cíclica de la economía. A partir de ahí su empleo se ha popularizado en las investigaciones académicas, por ejemplo en Ortega, Ferraz y Hurtado (2007), Estrada, Hernández de Cos y Jareño (2004), Manrique y Marqués (2004), Izquierdo y Jareño (2007), Estrada y Hernández de Cos (2009). Y también en informes oficiales legalmente requeridos para la confección de los presupuestos y cuya elaboración es previa a éstos: es el caso del

<sup>2</sup> Una interesante revisión de estos trabajos puede encontrarse en Felipe y Fisher (2001) y Felipe y McCombie (2005), Felipe y Adams (2005).

<sup>3</sup> Robinson (1954).

<sup>4</sup> Véase, por ejemplo, Bouthevillain et al (2001) o Denis et al (2002, 2006).

denominado "*Informe sobre la Posición Cíclica de la Economía Española*" elaborado de forma conjunta por el Banco de España, el Ministerio de Economía y Hacienda (MEH) y el Instituto Nacional de Estadística (INE) [véase artículo 8.2 del Texto Refundido de la Ley General de Estabilidad Presupuestaria].

En segundo lugar, y muy ligado a la obra de Solow, la "Nueva Escuela del Crecimiento Endógeno" (véase Mankiw et al., 1992) revitalizó el interés por el estudio de los elementos que contribuyen al crecimiento económico, para determinar en qué medida es la productividad o la dotación de factores lo que alimenta el proceso. Con este tipo de análisis se pretende contribuir a focalizar reformas estructurales en aquellos mercados de factores cuya aportación al crecimiento no sea satisfactoria [véase Freire – Serén (2001), Estrada, Hernández de Cos y Jareño (2004), Sosvilla – Rivero y Alonso Meseguer (2005) y Estrada y Hernández de Cos (2009) para el caso español].

Asistimos en definitiva a la resurrección de la tradición metodológica impulsada por Solow (1956, 1957), conocida como "Teoría Neoclásica del Crecimiento", que hace caso omiso a las innumerables objeciones de que ha sido objeto el manejo de la función de producción en general y de la función Cobb – Douglas en particular.

Efectivamente, esta proliferación de aplicaciones prácticas de la función Cobb - Douglas choca con la imposibilidad teórica de construir una función de producción agregada: la inviabilidad de medir y por tanto agregar capital, la imposibilidad de agregar microfuciones de producción y de separar las productividades marginales imputables a cada factor, así como las restrictivas condiciones que debería cumplir para explicar la retribución de los factores muestran que a nivel teórico las funciones de producción agregadas son simplemente una ficción algebraica. Ficción que puede conducir a interpretaciones erróneas de la realidad: así, por ejemplo, al calcular  $A_t$  como un residuo, éste recoge en realidad los errores debidos a la mala especificación de un modelo forzado con supuestos no realistas y su sesgo se proyecta sobre el cálculo de la renta potencial. Por tanto, no puede dársele a esta variable una interpretación unívoca, ni utilizarse legítimamente para interpretar las causas del crecimiento.

Aún así, algunos autores advierten de la posibilidad de que algunas estimaciones econométricas del modelo  $y_t = A_t \cdot L_t^\alpha \cdot K_t^{(1-\alpha)}$  ofrezca resultados aparentemente satisfactorios. Varios de ellos [Phelps Brown (1957), Shaikh (1974, 1980, 1987), Felipe y McCombie (2005)] han apuntado la posibilidad de que tales estimaciones capturen una mera identidad contable (la distribución de renta entre factores), y no la función de producción en sí, lo cuál tiene graves consecuencias cuando se trata de realizar ejercicios de inferencia, tales como, estimar ganancias de renta al cambiar la dotación de alguno de los factores productivos. En particular han señalado que cualquier matriz de datos que incluya  $(y_t, L_t, K_t)$  permite una buena estimación de una función Cobb – Douglas siempre que se cumplan dos condiciones: que las participaciones de los factores en la renta sean constantes, y que los precios de los factores crezcan a una tasa constante. Es decir, podría darse el caso en que al hacer una regresión de  $y_t$  sobre el par  $(L_t, K_t)$  obtengamos una buena estimación econométrica, ajustada a la forma funcional Cobb – Douglas, pero esa estimación, aún correspondiendo al

esquema de función Cobb - Douglas, *no es una función de producción*. Mientras la función de producción  $y = f(L, K)$  recoge una relación técnica (máximo producto que se puede conseguir con una combinación dada de factores), el uso de factores recoge una identidad contable correspondiente a su retribución:  $y = w \cdot L + r \cdot K$ . Dados un precios de los factores productivos  $(w, r)$ , la identidad contable siempre se cumple, porque simplemente nos informa de cuál sería la renta necesaria para retribuir a los factores, así que siempre podemos encontrar un valor de  $y$  que no es sino la valoración monetaria de cualquier par  $(L, K)$  que propongamos. Pero no sucede al contrario: cualquier  $y$  no siempre es la máxima producción que podemos lograr con un par  $(L, K)$  porque la economía no siempre está funcionando competitivamente (de hecho lo normal es que no lo haga) y los factores de producción no son retribuidos según su productividad marginal. De este modo, cuando construimos series temporales del trinomio  $(y_t, L_t, K_t)$  podemos garantizar que corresponden a la identidad contable  $y = w \cdot L + r \cdot K$ , pero no necesariamente que pertenezcan a la función  $y = f(L, K)$ . De modo que las regresiones estimadas a partir del trinomio  $(y_t, L_t, K_t)$  no tienen por qué corresponderse a una función de producción.

Esto tiene una grave repercusión cuando tratamos de utilizar las estimaciones de la función de producción para interpretar las fuentes del crecimiento económico, ya que al realizar cálculos de la contribución al crecimiento, los cálculos del tipo  $\frac{dy}{dx}$  no son incrementos de la renta que podamos esperar a causa del crecimiento en la dotación del factor  $x$ , sino el gasto marginal necesario para retribuirlo, dados los precios de los factores, lo cual no es en modo alguno idéntico salvo que la función de producción sea linealmente homogénea y la economía funcione competitivamente.

La posibilidad de que, a pesar de su inconsistencia teórica, podamos encontrar estimaciones econométricas razonables del modelo  $y_t = A_t \cdot L_t^\alpha \cdot K_t^{(1-\alpha)}$  es lo que nos anima a hacer nuestra propia investigación empírica. Si, para el caso español es posible encontrarlas, cabe plantearse si se trata de una verdadera función de producción, o de la función contable subyacente. Si no la encontramos, sería una prueba adicional de la invalidez de dicho concepto.

En lo que sigue nuestro trabajo se estructura de la siguiente manera. En el apartado segundo presentamos la metodología general utilizada en las investigaciones sobre el crecimiento potencial y la posición cíclica de la economía española; en el apartado tercero analizamos empíricamente la pertinencia de la función Cobb - Douglas; en el apartado cuarto discutimos la trascendencia de las limitaciones y sesgos que esa metodología impone y, finalmente, presentamos las conclusiones.

## PRODUCCIÓN POTENCIAL: METODOLOGÍA GENERAL DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

La producción potencial de una economía no es una variable observable. En consecuencia, su estimación depende de cómo la definamos, de qué función matemática específica y de qué datos empleemos. Distintas definiciones, distintas

funciones matemáticas, o incluso la misma función recurriendo a datos distintos, arrojarán resultados distintos. Por la misma razón el output gap, que es una variable definida en relación al producto potencial, puede arrojar distintos resultados según el método empleado para su obtención. Y otro tanto sucede con el análisis de las aportaciones de los factores productivos al crecimiento.

Los múltiples enfoques que existen para calcular la producción potencial pueden ser agrupados en dos grandes familias: los *métodos estadísticos* y los *métodos analíticos*.

Los *métodos estadísticos* se limitan a procesar los datos de producción observada mediante algún filtro que se considere óptimo. El más popular es el Filtro Hodrick - Prescott, si bien el filtro Baxter - King tiene una difusión creciente<sup>5</sup>. Sus principales ventajas son tres. En primer lugar, está incorporado a los paquetes informáticos estadísticos y econométricos; en segundo lugar, sólo emplea datos de la propia variable de referencia (producción observada) y, en tercer lugar, no requiere la construcción de ningún modelo subyacente de teoría económica. Tales características lo convierten en una herramienta muy accesible y ampliamente utilizada en los análisis económicos de las principales instituciones nacionales (bancos centrales) e internacionales (FMI, OCDE, Comisión Europea, etc.). En el caso de España, éste es un procedimiento utilizado por el Ministerio de Economía y Hacienda (MEH) en su aportación al ya citado "*Informe sobre la Posición Cíclica de la Economía Española*" (en adelante, "*Informe*"). Sus principales defectos devienen de su sencillez. En primer lugar, ofrecen un tratamiento muy mecánico de las series de datos y no tienen en cuenta cambios estructurales ni información muy relevante procedente de series de datos distintas de la variable de referencia filtrada, ni expectativas. En segundo lugar, presentan el llamado "*sesgo de punto final*" ("*end - point bias*") especialmente problemático cuando lo que nos interesa no es el comportamiento histórico del ciclo sino la identificación de la posición cíclica reciente o actual de la economía: los resultados de este filtro son menos fiables cuanto más reciente es el periodo al que lo aplicamos.

Los *métodos analíticos* o *métodos basados en la teoría económica* reconstruyen la producción a partir de hipótesis acerca del funcionamiento de la economía. Su pretendida ventaja reside en estar soportados por alguna teoría o conjunto de teorías generalmente aceptadas. Ello permitiría no sólo estimar el output potencial sino determinar los factores que dan lugar a sus variaciones, enriqueciendo el análisis de la estructura de cualquier economía. Esta metodología -aportada por el Banco de España- también la incluye el MEH en el citado "*Informe*" y la principal ventaja que se esgrime frente a los métodos estadísticos es precisamente su capacidad explicativa de los factores que contribuyen al crecimiento<sup>6</sup>.

---

<sup>5</sup> Una comparación entre las propiedades de ambos filtros puede encontrarse en Flores Pizarro (2000) o en Guay y St - Amant (1997).

<sup>6</sup> Una aplicación al análisis de la productividad en los países de la Unión Europea puede consultarse en Comisión Europea (2007). Para el caso español véase, por ejemplo, Estrada, Hernández de Cos y Jareño (2004).

El *método analítico estándar* para la determinación del output potencial parte de la famosa Función de Producción Cobb – Douglas linealmente homogénea:

$$y_t = A_t \cdot L_t^\alpha \cdot K_t^{(1-\alpha)} \quad (1)$$

siendo  $y$  el PIB real observado,  $L$  el factor trabajo,  $K$  el factor capital y  $A$  un indicador de escala de la *Productividad Total de los Factores*. Esa misma expresión en logaritmos suele utilizarse como:

$$\log y_t = a_t + \alpha \cdot \log L_t + (1-\alpha) \cdot \log K_t \quad (2)$$

Se supone que  $\alpha$  y  $(1-\alpha)$  son las participaciones relativas de cada factor  $[L, K]$  en la distribución del PIB, es decir, que los mercados son completamente competitivos y que los cambios tecnológicos son neutrales en el sentido de Hicks. Los valores de estos coeficientes se toman a partir de la Contabilidad Nacional, como media aritmética de un periodo tan prolongado como sea posible. En resumen, las variables *observadas* de las que disponemos son:  $y_t, L_t, K_t$ . Hecho este supuesto, se procede a estimar la variable  $A_t$  o "*Productividad Total de los Factores*" como un residuo:

$$A_t = \frac{y_t}{L_t^\alpha \cdot K_t^{(1-\alpha)}} \quad (3)$$

En el caso español la variable  $L$  puede obtenerse de la Encuesta de Población Activa (EPA), o de la Contabilidad Nacional, ambas fuentes elaboradas por el Instituto Nacional de Estadística (INE); mientras que la serie  $K$  se construye por el procedimiento de inventario permanente. Obtenida la estimación de  $A_t$  se le aplica un filtrado Hodrick – Prescott obteniendo la serie  $\tilde{A}_t$ . La estimación del PIB potencial ( $\bar{y}_t$ ) se realiza finalmente como:

$$\bar{y}_t = \tilde{A}_t \cdot \bar{L}_t^\alpha \cdot \bar{K}_t^{(1-\alpha)} \quad (4)$$

Y el output gap:

$$gap_t = \frac{y_t - \bar{y}_t}{\bar{y}_t} \cdot 100 \quad (5)$$

Para la estimación de (4) se requieren unos supuestos adicionales. En las publicaciones antes citadas, es habitual imponer que en una situación de corto plazo el capital siempre está plenamente empleado de modo que  $K_t$  toma directamente el valor de Contabilidad Nacional: no hay capacidad instalada desocupada<sup>7</sup>. Sin embargo no sucede así con el nivel de empleo: el cálculo de la ecuación (4) requiere disponer de  $\bar{L}_t$ , es decir, el nivel de ocupación de pleno empleo. El procedimiento más habitual es imponer que este nivel corresponde a aquel que resulta compatible con la tasa de

<sup>7</sup> Aunque esta es la estrategia empleada en las investigaciones citadas, no es la opción original. Solow (1957, p. 314) indica de modo expreso que es el capital utilizado ( $K_t^u$ ) y no el capital instalado ( $K_t$ ) lo que debe utilizarse en los cálculos. A tal fin propone aplicar la tasa de paro ( $U_t$ ) al capital instalado de modo que  $K_t^u = K_t(1-U_t)$ .

desempleo Nairu<sup>8</sup>. Esta opción admite a su vez varias versiones y las investigaciones publicadas por el Banco de España muestran la Nairu calculada utilizando un VAR estructural (SVAR), la Curva de Phillips o un filtro BP. Aunque no se suelen aplicar a estos análisis, también existen estudios de tasas de desempleo de equilibrio alternativas a la Nairu, como por ejemplo las basadas en la Ley de Okun [véase Murillo y Usabiaga (2003)].

Esta metodología es plenamente coherente con la Teoría Neoclásica del Crecimiento, cuyos supuestos son muy restrictivos: competencia perfecta, pleno empleo, rendimientos constantes a escala, cambio técnico neutral, etc. Tales supuestos no son compatibles con la realidad de la economía española.

## APLICACIÓN AL CASO DE LA ECONOMÍA ESPAÑOLA

Hemos procedido a realizar un conjunto de pruebas econométricas que nos permitan discernir hasta qué punto son admisibles algunos de los supuestos que incorpora la metodología explicada. Comenzamos por el modelo (2) para la economía española en el periodo 1960 – 2010. Aunque no se trata exactamente del modelo de Solow (1957), sobre el que volveremos más adelante, nuestra atención en él se justifica porque es el modelo empleado en las investigaciones antes citadas. En realidad el modelo (2) no puede estimarse econométricamente ya que, por construcción, se trata de una mera identidad en la que la variable  $A_t$  no sólo no es observable sino que simplemente es una construcción teórica a la que se llega mediante la expresión (3) y a la que arbitrariamente se la denomina "Productividad Total de los Factores". Por ello podemos tratar de comprobar si la economía española se comporta de acuerdo con algún tipo de función que cumpla los requisitos básicos de la función Cobb – Douglas: ser linealmente homogénea, contener los factores trabajo y capital, y que sus coeficientes sean no negativos.

En los cuadros 1, 2 y 3 aplicamos el test ADF de raíces unitarias para conocer el orden de integración de las variables  $[y_t, L_t, K_t]$  expresadas en logaritmos. Puede comprobarse que las variables del modelo son no estacionarias de orden I(1).

---

<sup>8</sup> En los últimos años han proliferado investigaciones sobre la Nairu aplicadas a España, las cuales han cobrado especial impulso con la entrada en vigor de la reforma de la Ley de Estabilidad Presupuestaria. Por orden cronológico podríamos citar entre otras De Lamo y Dolado (1993); Bellod Redondo (1999); Estrada, Hernando y López – Salido (2000); Gómez García y Usabiaga Ibáñez (2001); Estrada, Hernández de Cos y Jareño (2004); Manrique y Marqués (2004); Izquierdo y Regil (2006). Dada esta diversidad de estimaciones, en nuestro trabajo recurriremos a la estimación de la Nairu que de forma sistemática ofrece Ameco Database (ver nota 15).



**Cuadro 1**

Test de Raíz Unitaria.					
Variable: $\text{Log}(y_t)$					
Valor del estadístico					
Test		$x_t$	$\Delta x_t$	$\Delta^2 x_t$	$I(d)$
ADF	$\mu$	-1,981	-3,266	---	I(1)
	$\mu, \lambda$	-2,261	-3,605	---	I(1)

Muestra: 1960 – 2010. Regresión  $\Delta x_t = \mu + \lambda \cdot \text{time} + \beta \cdot x_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Delta x_{t-i}$ .

Valores críticos test ADF: incluyendo media y tendencia [-4,156 (1%), -3,504 (5%), -3,181 (10%)];  
incluyendo sólo media [-3,571 (1%), -2,922 (5%), -2,599 (1%)].

**Fuente:** elaboración propia a partir de datos de anexo.

**Cuadro 2**

Test de Raíz Unitaria.					
Variable: $\text{Log}(L_t)$					
Valor del estadístico					
Test		$x_t$	$\Delta x_t$	$\Delta^2 x_t$	$I(d)$
ADF	$\mu$	-1,404	-3,355	---	I(1)
	$\mu, \lambda$	-2,319	-3,596	---	I(1)

Muestra: 1960 – 2010. Regresión  $\Delta x_t = \mu + \lambda \cdot \text{time} + \beta \cdot x_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Delta x_{t-i}$ .

Valores críticos test ADF: incluyendo media y tendencia [-4,156 (1%), -3,504 (5%), -3,181 (10%)];  
incluyendo sólo media [-3,571 (1%), -2,922 (5%), -2,599 (1%)].

**Fuente:** elaboración propia a partir de datos de anexo.

**Cuadro 3**

Test de Raíz Unitaria.					
Variable: $\text{Log}(K_t)$					
Valor del estadístico					
Test		$x_t$	$\Delta x_t$	$\Delta^2 x_t$	$I(d)$
ADF	$\mu$	-1,485	-2,932	---	I(1)
	$\mu, \lambda$	-3,535	---	---	I(0)

Muestra: 1960 – 2010. Regresión  $\Delta x_t = \mu + \lambda \cdot \text{time} + \beta \cdot x_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Delta x_{t-i}$ .

Valores críticos test ADF: incluyendo media y tendencia [-4,156 (1%), -3,504 (5%), -3,181 (10%)];  
incluyendo sólo media [-3,571 (1%), -2,922 (5%), -2,599 (1%)].

**Fuente:** elaboración propia a partir de datos de anexo.

A partir de estos datos procede analizar la existencia de una relación estable (cointegración) entre tales variables. Dado que las tres variables analizadas son integradas del mismo orden ( $d=1$ ) realizamos un análisis de cointegración (Johansen). Comenzamos estimando el orden del retardo con el que cada variable diferenciada entrará en el modelo: en el Cuadro 4 hemos presentado un resumen que indica el retardo óptimo según distintos criterios habituales, resultados que apuntan a que el retardo sería de 2 o 3 periodos. Para evitar un exceso de retardo hemos examinado la autocorrelación de los residuos del modelo VEC, confirmándose que dos retardos son suficientes para garantizar que los errores no están autocorrelacionados (véase Cuadro 5).

**Cuadro 4**

Retardo óptimo del modelo VEO. Variables: $\text{Log}(y_t)$ , $\text{Log}(L_t)$ , $\text{Log}(K_t)$ (Muestra 1960 – 2010)						
Retardo	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	89,59136	NA	5,04e-06	-3,684739	-3,566644	-3,640299
1	468,9297	694,1085	7,22e-13	-19,44382	-18,97144	-19,26606
2	502,8058	57,66143	2,52e-13	-20,50237	-19,67571*	-20,19130*
3	514,4444	18,32457*	2,28e-13*	-20,61465*	-19,43371	-20,17026
4	521,1433	9,692032	2,58e-13	-20,51674	-18,98151	-19,93902

\* indica el orden del retardo seleccionado por el criterio con una significatividad del 5%.

LR: estadístico LR; FPE: Error de Predicción Final; AIC: criterio informacional de Akaike; SC: criterio informacional de Schwarz; HQ: criterio informacional de Hannan – Quinn.

**Fuente:** elaboración propia con datos de anexo.

**Cuadro 5**

Test de auto-correlación de los Residuos del Modelo VEC (Portmanteau). H0: no hay autocorrelación por encima de "h"					
Retardo "h"	Estadístico Q	Prob.	Estadístico A ajustado	Prob.	Grados Libertad
1	1,259056	NA*	1,285845	NA*	NA*
2	3,276562	NA*	3,391068	NA*	NA*
3	13,43285	0,1440	14,22444	0,1146	9
4	23,16933	0,1842	24,84606	0,1292	18
5	27,58487	0,4326	29,77504	0,3244	27
6	34,02372	0,5629	37,13372	0,4166	36

7	36,58057	0,8101	40,12711	0,6781	45
8	43,87894	0,8358	48,88514	0,6714	54
9	52,15297	0,8334	59,06856	0,6172	63
10	57,96106	0,8848	66,40510	0,6638	72
11	61,21309	0,9505	70,62396	0,7881	81
12	67,66362	0,9621	79,22465	0,7845	90

\* Este test solo es valido para retardos mayores que el del VAR.

**Fuente:** elaboración propia con datos de anexo.

Determinado el orden óptimo de los retardos que vamos a introducir en el modelo, en el Cuadro 6 y en el Cuadro 7 mostramos los resultados del test de cointegración (el primero no contiene tendencia determinista y el segundo sí). En ambos casos se concluye la existencia de dos relaciones de cointegración, pero ninguna de ellas corresponde al modelo Cobb – Douglas: en el modelo uniecuacional se obtiene un coeficiente normalizado negativo para el factor trabajo (-2,75 o -2,55 según esté ausente o no el término tendencia), lo cual viola una de las características básicas de toda función de producción, también de la Cobb – Douglas. El modelo biecuacional tampoco es satisfactorio: el factor  $K_t$  queda fuera de la función de producción, y en su conexión con el factor  $L_t$  no resulta estadísticamente significativo.

**Cuadro 6**

TEST DE COINTEGRACIÓN				
Variables: $Log(y_t), Log(L_t), Log(K_t)$				
Muestra: 1963 – 2010				
Retardos: 2. No incluye tendencia lineal.				
Test de Rango No Restringido (Traza)				
Hipótesis: No. ecuaciones cointegrantes	Autovalor	Estadístico	Valor Crítico	Prob.**
Ninguna *	0,422218	43,09336	29,79707	0,0009
Como mucho 1 *	0,294722	16,76251	15,49471	0,0321
Como mucho 2	5,63e-05	0,002703	3,841466	0,9560

El test de traza indica 2 ecuaciones de cointegración al 5%.

\* Indica rechazo de la hipótesis al 5%.

\*\* MacKinnon – Haug – Michelis (1999) p – valores.

Test de Rango No Restringido (Máximo autovalor)				
Hipótesis: No. ecuaciones cointegrantes	Autovalor	Estadístico	Valor Crítico	Prob.**
Ninguna *	0,422218	26,33085	21,13162	0,0085
Como mucho 1 *	0,294722	16,75981	14,26460	0,0197
Como mucho 2	5,63E-05	0,002703	3,841466	0,9560
El test de máximo autovalor indica 2 ecuaciones de cointegración al 5%.				
* Indica rechazo de la hipótesis al 5%.				
** MacKinnon – Haug – Michelis (1999) p – valores.				
1 Ecuación de cointegración:		Log likelihood:	517,5967	
Coeficientes normalizados de cointegración (entre paréntesis la desviación típica)				
$Log(y_t)$	$Log(L_t)$	$Log(K_t)$		
1,000000	2,756030	-2,814646		
	(0,72614)	(0,36313)		
2 Ecuaciones de cointegración:		Log likelihood	525,8896	
Coeficientes normalizados de cointegración (entre paréntesis la desviación típica)				
$Log(y_t)$	$Log(L_t)$	$Log(K_t)$		
1,000000	0,000000	-0,664203		
		(0,03533)		
0,000000	1,000000	-0,780269		
		(0,08939)		

**Fuente:** elaboración propia a partir de datos de anexo.

### Cuadro 7

TEST DE COINTEGRACIÓN				
Variables: $Log(y_t)$ , $Log(L_t)$ , $Log(K_t)$				
Muestra: 1963 – 2010				
Retardos: 2. Incluye tendencia lineal.				
Test de Rango No Restringido (Traza)				
Hipótesis: No. ecuaciones cointegrantes	Autovalor	Estadístico	Valor Crítico	Prob.**
Ninguna *	0,506873	66,84497	42,91525	0,0000
Como mucho 1 *	0,402766	32,90950	25,87211	0,0056
Como mucho 2	0,156478	8,168116	12,51798	0,2382
El test de traza indica 2 ecuaciones de cointegración al 5%.				
* Indica rechazo de la hipótesis al 5%.				
** MacKinnon – Haug – Michelis (1999) p – valores.				

Test de Rango No Restringido (Máximo autovalor)				
Hipótesis: No. ecuaciones cointegrantes	Autovalor	Estadístico	Valor Crítico	Prob.**
Ninguna *	0,506873	33,93547	25,82321	0,0034
Como mucho 1 *	0,402766	24,74138	19,38704	0,0075
Como mucho 2	0,156478	8,168116	12,51798	0,2382
El test de máximo autovalor indica 2 ecuaciones de cointegración al 5%.				
* Indica rechazo de la hipótesis al 5%.				
** MacKinnon - Haug - Michelis (1999) p - valores.				
1 Ecuación de Cointegración:		Log likelihood	521,175	
Coeficientes normalizados de cointegración (entre paréntesis la desviación típica)				
$Log(y_t)$	$Log(L_t)$	$Log(K_t)$	@TREND(61)	
1,000000	0,255595 (0,04409)	-1,307848 (0,06721)	0,014645 (0,00280)	
2 Ecuaciones de Cointegración:		Log likelihood	533,7992	
Coeficientes normalizados de cointegración (entre paréntesis la desviación típica)				
$Log(y_t)$	$Log(L_t)$	$Log(K_t)$	@TREND(61)	
1,000000	0,000000	-1,007472 (0,13316)	0,011313 (0,00504)	
0,000000	1,000000	-1,175200 (0,56890)	0,013036 (0,02153)	

**Fuente:** elaboración propia a partir de datos de anexo.

Alternativamente, podemos realizar todo este análisis econométrico ateniéndonos al procedimiento original de Solow (1957), llegando a resultados análogos. Solow parte de la ecuación  $q_t = A_t \cdot f(k_t, 1)$ , siendo  $q_t = \frac{y_t}{L_t}$  (productividad media del trabajo) y  $k_t = \frac{K_t}{L_t}$  (relación capital - trabajo). Propone concretamente estimar las cinco especificaciones siguientes:

$$\frac{q_t}{A_t} = \alpha + \beta \cdot k_t \tag{6}$$

$$\frac{q_t}{A_t} = \alpha + \beta \cdot \text{Log}(k_t) \tag{7}$$

$$\frac{q_t}{A_t} = \alpha - \frac{\beta}{k_t} \tag{8}$$

$$\text{Log}\left(\frac{q_t}{A_t}\right) = \alpha + \beta \cdot \text{Log}(k_t) \tag{9}$$

$$\text{Log}\left(\frac{q_t}{A_t}\right) = \alpha - \frac{\beta}{k_t} \tag{10}$$

Al hacer una regresión de  $\frac{q_t}{A_t}$  respecto a  $k_t$ , Solow pretendía aislar la función de producción "subyacente", ya que cuando observamos la evolución temporal de  $y_t$  en sus cambios se confunden las variaciones tecnológicas y las variaciones en la dotación de factores.

Hemos reproducido las estimaciones econométricas de Solow (1957) con los mismos datos de USA para el periodo 1909 - 1949, por el mismo procedimiento original (MCO) pero aportando el estadístico Durbin - Watson (ver Cuadro 8). Solow se limitó a aportar el estadístico R<sup>2</sup> como prueba de la calidad de sus estimaciones<sup>9</sup>, concluyendo expresamente en dicho artículo que éstas eran correctas y con un alto poder explicativo, abriendo la puerta al uso de su metodología para la estimación de funciones de producción agregadas a cualquier economía.

**Cuadro 8**

Modelo de Solow (muestra 1909 - 1949, USA)				
	$\alpha$	$\beta$	R2	Durbin - Watson
$\frac{q_t}{A_t} = \alpha + \beta \cdot k_t$	0,445 (42,0)	0,089 (22,4)	0,928	0,116
$\frac{q_t}{A_t} = \alpha + \beta \cdot \text{Log}(k_t)$	0,452 (50,1)	0,238 (25,5)	0,943	0,146
$\frac{q_t}{A_t} = \alpha - \frac{\beta}{k_t}$	0,919 (103,1)	-0,618 (-26,9)	0,949	0,205
$\text{Log}\left(\frac{q_t}{A_t}\right) = \alpha + \beta \cdot \text{Log}(k_t)$	-0,722 (-52,8)	0,351 (24,8)	0,940	0,131
$\text{Log}\left(\frac{q_t}{A_t}\right) = \alpha - \frac{\beta}{k_t}$	-0,032 (-2,45)	-0,914 (-27,1)	0,949	0,181

(\*): Entre paréntesis el estadístico "t".

**Fuente:** elaboración propia a partir de datos contenidos en Solow (1957, página 315).

Efectivamente todas las regresiones presentan un elevadísimo R<sup>2</sup> pero el estadístico Durbin - Watson es simultáneamente muy próximo a 0. Ésta es una muestra clara de que estamos ante una correlación espuria, debido al carácter no estacionario de las variables utilizadas. A partir de esta evidencia realizamos un análisis de estacionariedad y cointegración de las variables  $\left[\frac{q_t}{A_t}, k_t\right]$  que mostramos en el Cuadro 9 y en el Cuadro 10. Los resultados son demoledores para quienes pretenden validar econométricamente la función de producción: en el Cuadro 9, el test de raíces unitarias ADF demuestra que estas variables son no estacionarias de orden I(1); en los

<sup>9</sup> Obviamente no es responsabilidad de Solow, ya que cuando éste realiza su trabajo el estadístico Durbin - Watson no había alcanzado la difusión que tiene hoy.

Cuadro 10 y 11 se confirma la ausencia de relación de largo plazo entre ellas<sup>10</sup>. En otras palabras, las regresiones de Solow (1957), pese al elevado valor de  $R^2$ , carecen de valor probatorio alguno, al menos en el periodo analizado por Solow<sup>11</sup>.

**Cuadro 9**

Tests ADF de Raíz Unitaria Modelo de Solow – USA				
Variable	$x_t$	$\Delta x_t$	$\Delta^2 x_t$	$I(d)$
$q_t / A_t$	-1,844	-4,261	---	$I(1)$
$k_t$	-1,874	-4,148	---	$I(1)$

Muestra: 1909 – 1949, Estados Unidos.

**Fuente:** elaboración propia a partir de datos de Solow (1957, p. 315).

**Cuadro 10**

ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN DE JOHANSEN Modelo de Solow: variables $q_t / A_t$ , $k_t$ (sin tendencia) (muestra 1909 – 1949, USA)				
Test de Traza				
Hipótesis: Número de ecuaciones	Autovalor	Traza Estadístico	Valor Crítico Al 5%	Prob.**
Ninguna	0,096761	4,752516	15,49471	0,8345
Como mucho 1	0,019891	0,783574	3,841466	0,3760

El test de traza indica que no existe cointegración al nivel del 5%.  
\*indica rechazo de la hipótesis al nivel del 5%.  
\*\*MacKinnon – Haug – Michelis (1999) p – valores.

Test de Máximo Autovalor				
Hipótesis: Número de ecuaciones	Autovalor	Estadístico máximo autovalor	Valor crítico al 5%	Prob.**
Ninguna	0,096761	3,968942	14,26460	0,8626
Como mucho 1	0,019891	0,783574	3,841466	0,3760

El test de máximo autovalor indica que no existe cointegración al 5%.  
\* indica rechazo de la hipótesis al nivel del 5%.  
\*\*MacKinnon – Haug – Michelis (1999) p – valores.

<sup>10</sup> Aunque no se ha incluido por razones de espacio, en este caso el retardo óptimo del VAR es 1.

<sup>11</sup> Antrás (2004), en una estimación más actualizada, ha examinado empíricamente el caso de Estados Unidos para el periodo 1948 – 1998, concluyendo que la función Cobb – Douglas no funciona.

**Fuente:** elaboración propia a partir de datos de Solow (1957, p. 315).

**Cuadro 11**

ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN DE JOHANSEN				
Modelo de Solow: variables $q_t / A_t$ , $k_t$ (con tendencia)				
(muestra 1909 - 1949, USA)				
Test de Traza				
Hipótesis: Número de ecuaciones	Autovalor	Traza Estadístico	Valor crítico al 5%	Prob.**
Ninguna	0,253116	14,60635	25,87211	0,6073
Como mucho 1	0,079350	3,224357	12,51798	0,8488
El test de traza indica que no existe cointegración al nivel del 5%.				
* indica rechazo de la hipótesis al nivel del 5%.				
** MacKinnon - Haug - Michelis (1999) p - valores.				
Test de Máximo Autovalor				
Hipótesis: Número de ecuaciones	Autovalor	Estadístico máximo autovalor	Valor crítico al 5%	Prob.**
Ninguna	0,253116	11,38199	19,38704	0,4747
Como mucho 1	0,079350	3,224357	12,51798	0,8488
El test de máximo autovalor indica que no existe cointegración al 5%.				
* indica rechazo de la hipótesis al nivel del 5%.				
** MacKinnon - Haug - Michelis (1999) p - valores.				

**Fuente:** elaboración propia a partir de datos de Solow (1957, p. 315).

Para el caso de España, hemos realizado un análisis análogo aplicado al periodo 1961 - 2010. En el Anexo se detalla el proceso de construcción de las variables y los datos empleados y obtenidos. Como se aprecia en el Cuadro 12, el resultado de aplicar el modelo de Solow a la economía española ofrece unos resultados igualmente decepcionantes: elevados valores para  $R^2$ , y reducidos para Durbin - Watson. En el Cuadro 12 se ofrecen los datos del test ADF de raíz unitaria, concluyendo que ambas series son integradas de orden  $I(1)$ . A pesar de ello, como nos confirma el Cuadro 14 y el Cuadro 15, no existe relación de largo plazo entre ambas variables<sup>12</sup>.

<sup>12</sup> Aunque no se ha incluido por razones de espacio, en este caso el retardo óptimo del VAR es 3.



**Cuadro 12**

Modelo de Solow (muestra 1961 – 2010, España)				
	$\alpha$	$\beta$	R2	Durbin - Watson
$\frac{q_t}{A_t} = \alpha + \beta \cdot k_t$	0,008 (61,9)	0,103 (70,4)	0,99	0,396
$\frac{q_t}{A_t} = \alpha + \beta \cdot \text{Log}(k_t)$	0,035 (116,3)	0,007 (62,4)	0,98	0,350
$\frac{q_t}{A_t} = \alpha - \frac{\beta}{k_t}$	0,023 (78,8)	-0,000 (-24,1)	0,92	0,095
$\text{Log}\left(\frac{q_t}{A_t}\right) = \alpha + \beta \cdot \text{Log}(k_t)$	-2,89 (-279,3)	0,469 (118,3)	0,99	1,300
$\text{Log}\left(\frac{q_t}{A_t}\right) = \alpha - \frac{\beta}{k_t}$	-3,694 (-279,9)	-0,027 (-33,8)	0,95	0,157

(\*): Entre paréntesis el estadístico "t".

**Fuente:** elaboración propia a partir de datos relacionados en el anexo.

**Cuadro 13**

Test ADF de Raíz Unitaria – ESPAÑA					
Variables: $q_t / A_t$ ; $k_t$					
Valor del estadístico					
Variable		$x_t$	$\Delta x_t$	$\Delta^2 x_t$	$I(d)$
$q_t / A_t$	$\mu$	-0,591	-5,038	---	I(1)
	$\mu, \lambda$	-1,730	-4,986	---	I(1)
$k_t$	$\mu$	-0,224	-3,308	---	I(1)
	$\mu, \lambda$	-3,110	-3,232	-5,839	I(2)

Muestra: 1960 – 2010. Regresión  $\Delta x_t = \mu + \lambda \cdot \text{time} + \beta \cdot x_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Delta x_{t-i}$ .

Valores críticos test ADF: incluyendo media y tendencia [-4,156 (1%), -3,504 (5%), -3,181 (10%)];  
incluyendo sólo media [-3,571 (1%), -2,922 (5%), -2,599 (1%)].

**Fuente:** elaboración propia a partir de datos de anexo.

**Cuadro 14**

ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN DE JOHANSEN				
Modelo de Solow: variables $q_t / A_t, k_t$ (sin tendencia)				
(muestra 1965 - 2010, España)				
Test de Traza				
Hipótesis: Número de ecuaciones	Autovalor	Traza Estadístico	Valor Crítico Al 5%	Prob.**
Ninguna	0,243601	12,87688	15,49471	0,1194
Como mucho 1	0,000746	0,034317	3,841466	0,8530
El test de traza indica que no existe cointegración al nivel del 5%.				
* indica rechazo de la hipótesis al nivel del 5%.				
**MacKinnon - Haug - Michelis (1999) p - valores.				
Test de Máximo Autovalor				
Hipótesis: Número de ecuaciones	Autovalor	Estadístico máximo autovalor	Valor crítico al 5%	Prob.**
Ninguna	0,243601	12,84256	14,26460	0,0828
Como mucho 1	0,000746	0,034317	3,841466	0,8530
El test de máximo autovalor indica que no existe cointegración al 5%.				
* indica rechazo de la hipótesis al nivel del 5%.				
**MacKinnon - Haug - Michelis (1999) p - valores.				

**Fuente:** elaboración propia a partir de datos de Solow (1957, p. 315).

**Cuadro 15**

ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN DE JOHANSEN				
Modelo de Solow: variables $q_t / A_t, k_t$ (con tendencia)				
(muestra 1965 - 2010, España)				
Test de Traza				
Hipótesis: Número de ecuaciones	Autovalor	Traza Estadístico	Valor Crítico al 5%	Prob.**
Ninguna	0,258413	24,08138	25,87211	0,0822
Como mucho 1	0,201121	10,32911	12,51798	0,1130
El test de traza indica que no existe cointegración al nivel del 5%.				
* indica rechazo de la hipótesis al nivel del 5%.				
** MacKinnon - Haug - Michelis (1999) p - valores.				

Test de Máximo Autovalor				
Hipótesis: Número de ecuaciones	Autovalor	Estadístico máximo autovalor	Valor crítico al 5%	Prob.**
Ninguna	0,258413	13,75227	19,38704	0,2712
Como mucho 1	0,201121	10,32911	12,51798	0,1130

El test de máximo autovalor indica que no existe cointegración al 5%.

\* indica rechazo de la hipótesis al nivel del 5%.

\*\* MacKinnon – Haug – Michelis (1999) p – valores.

**Fuente:** elaboración propia a partir de datos de Solow (1957, p. 315).

En síntesis, las pruebas econométricas anteriores demuestran que el procedimiento general detallado en la sección 2 de este artículo, pese a su creciente utilización, carece de respaldo econométrico.

## PROBLEMÁTICA EN EL USO DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

Las pruebas anteriores muestran que en el caso de la economía española la función de producción Cobb – Douglas no representa adecuadamente el vínculo entre actividad económica y factores productivos (tampoco para la estadounidense en la versión original de Solow): o bien no es posible establecer una relación de largo plazo entre las variables del modelo o bien tal relación, caso de existir, no se ajusta a las características de la función Cobb – Douglas. Por ello la variable  $A_t$ , lejos de representar (como Solow pretendía) la contribución del cambio técnico al crecimiento, no es más que un residuo, una amalgama de elementos no recogidos por la errónea especificación de la ecuación (1). En consecuencia no puede tener una interpretación económica unívoca como la que se pretende al darle el nombre de “Productividad Total de los Factores”.

No es posible que imponiendo a una variable una estructura de comportamiento falsa obtengamos estimaciones correctas ni de dicha variable ni de otras variables que se deriven de ella. Necesariamente serán falsas (o al menos sesgadas) la medición del output gap y la medición de la contribución de los factores productivos al crecimiento.

Y, sin embargo, la función de producción Cobb – Douglas tiene una presencia creciente, como antes mostrábamos, en las investigaciones que se publican por prestigiosas instituciones (particularmente el Banco de España).

Hay al menos tres razones que explican por qué los defensores de esta metodología insisten en su utilización.

En primer lugar, este esquema permite una explotación (aparentemente) más rica del análisis de PIB que los métodos puramente estadísticos como el filtro Hodrick – Prescott, porque (aparentemente) permite indagar en el papel de los factores productivos en el crecimiento económico. Esta ventaja es falaz, porque si la ecuación

(1) no representa fielmente la función de producción agregada de la economía española (y no lo hace), el análisis de las modificaciones en las variables explicativas que contiene conduce a resultados carentes de sentido.

En segundo lugar, su utilización permite vincular el estudio del ciclo y de la producción potencial al concepto Nairu, un concepto hegemónico en la teoría económica actual en relación con el mercado de trabajo. Porque, atendiendo a la literatura revisada, es la Nairu y no otra medición alternativa del desempleo, la variable utilizada en conjunción con la función de producción Cobb - Douglas. La función Cobb - Douglas y la Nairu se refuerzan mutuamente como conceptos claves del pensamiento económico, al ser proyectados sobre la comunidad científica en las publicaciones - investigaciones patrocinadas por instancias oficiales (Banco de España, FMI, Comisión Europea) como si se tratase de conceptos - herramientas de utilidad contrastada. Sirven, siguiendo a Joan Robinson, a la estrategia de mala educación del pensamiento económico burgués.

Y, en tercer lugar, como demuestra la historia del pensamiento económico, los economistas son renuentes a deshacerse de teorías, conceptos o herramientas erróneas salvo que dispongan de alternativas tangibles. Como indica Blaug (1985, p. 821), *"los economistas detestan un vacío teórico tanto como la naturaleza detesta un vacío físico, y en economía, como en las otras ciencias, las teorías se abandonan por teorías mejores, no sólo por hechos contradictorios"*<sup>13</sup>.

El empleo de la función Cobb - Douglas en unión a la Nairu no resulta inocuo en modo alguno cuando tratamos de analizar la producción potencial y el ciclo económico.

El análisis de la posición cíclica y los desequilibrios de la economía española es un caso especialmente útil para entender el riesgo que entraña su utilización. Al introducir la Nairu como herramienta para señalar el ciclo se produce un cambio en el propio concepto de ciclo económico: éste se entiende ahora como la sucesión de desviaciones inflacionistas y deflacionistas respecto a un nivel de referencia (la producción potencial) construido a partir de la Nairu. Este no es el concepto tradicional de ciclo (procesos de aceleración y desaceleración de la actividad [Burns y Mitchell, 1946]), ni las tradicionales ondas largas y cortas (Juglar, Kitchin, Kondratief). Y en consecuencia el ciclo así estimado cae fuera del ámbito del análisis clásico de la Teoría de Ciclos, porque los movimientos recurrentes de la actividad económica carecen de interés para la teoría económica hegemónica actual, en la que sólo se reconocen las oscilaciones debidas a perturbaciones aleatorias.

Esto tiene un importante impacto en materia de política económica. Dado que en España las estimaciones de la posición cíclica sirven, en otras cosas, para definir la política presupuestaria (máximo déficit público admisible), vincula dicha política a las presiones inflacionistas o deflacionistas. Ciertamente una inflación sostenida es un desequilibrio que puede acabar minando el crecimiento económico, pero también es posible que el crecimiento sea desequilibrado, y por tanto abocado a una situación crítica, a pesar de registrarse una inflación reducida. En este caso, determinar la

---

<sup>13</sup> Es lo que A. O. Hirschman (1977, p. 71) denominó "Lema Streeten - Kuhn".

posición cíclica vía Nairu puede desviar peligrosamente la atención de otros desequilibrios en los que pudiera estar incurriendo la economía.

Esto es precisamente lo que ha pasado en los años previos a la actual crisis económica: la reducida inflación de finales de los 1990s (véase Gráfico 1) condujo a valores decrecientes de la Nairu, de modo que el output gap llegó incluso a ser negativo o prácticamente inexistente (años 2003, 2004 y 2005, véase gráfico 2) a pesar de la frenética actividad económica provocada por la especulación inmobiliaria. De hecho, la economía española estaba creciendo por encima de sus posibilidades, lo cual se traducía en un endeudamiento y en un déficit exterior crecientes que han acabado por minar el crecimiento. La participación de España en la Unión Económica y Monetaria ha permitido que las presiones por el lado de la demanda no se tradujesen, como era tradicional, en inflación, ya que el tipo de cambio era fijo (desaparecen tanto las devaluaciones como las expectativas de devaluación respecto a nuestros principales socios comerciales) facilitando el acceso al endeudamiento externo. En síntesis, desde finales de los años 90 el déficit exterior relevó a la inflación como principal desequilibrio asociado al crecimiento económico y, por ello, la medición de la posición cíclica basada en la Nairu falsea la realidad.

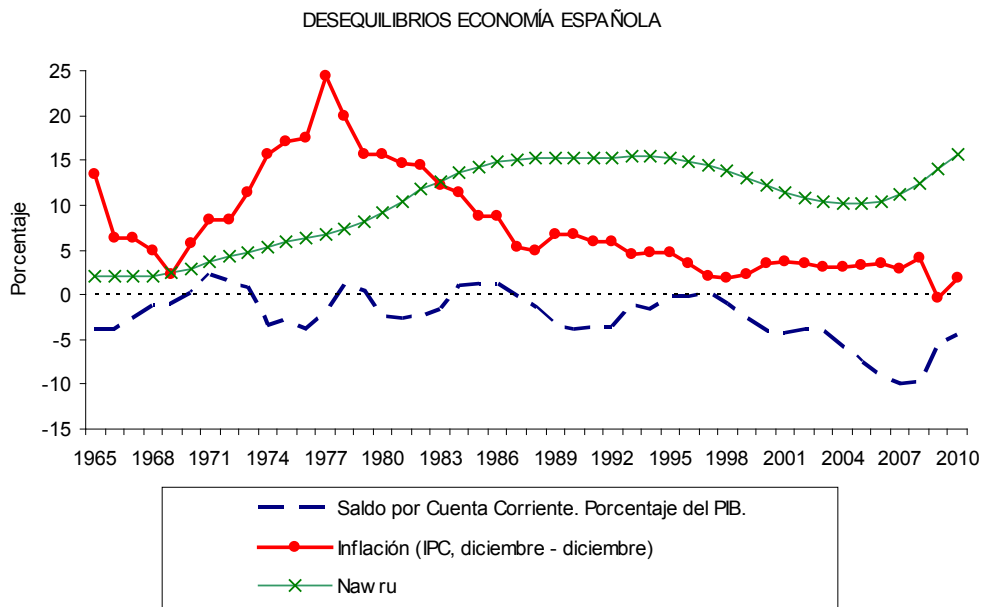
Esto puede comprobarse en el Gráfico 1, en el que registramos los datos del saldo de la Balanza por Cuenta Corriente (SCC), la Nawru<sup>14</sup> y la inflación. A partir de 1997 se produce una intensa y larga fase de crecimiento económico basada en la actividad inmobiliaria. Sin embargo, esa expansión no se traduce en presiones inflacionistas: los cálculos oficiales de precios indican un comportamiento bastante estable<sup>15</sup>. Lo que sí se produce es un deterioro considerable de las Balanzas de Pagos que pasa de un superávit de 0,1% en 1997 a un déficit histórico del -10% del PIB en 2007, año en que precisamente se inicia el cambio de ciclo. Pero si atendemos al gap de renta calculado con la metodología Cobb - Douglas - Nairu, el crecimiento en el periodo 1999 - 2007 fue aparentemente muy equilibrado como se aprecia en el Gráfico 2 ya que el output gap se reduce desde 2001 hasta 2005 y crece con mucha moderación en los años siguientes. Por desgracia hoy somos conscientes de que el enorme déficit exterior y su correlativo endeudamiento han sido un ingrediente fundamental de la actual crisis.

En síntesis, la experiencia reciente de la economía española indica que la utilización conjunta de la función de producción Cobb - Douglas y la Nairu distorsiona peligrosamente la percepción de los desequilibrios que amenazan al crecimiento económico.

<sup>14</sup> La Nairu (o Non-Accelerating Inflation Rate of Unemployment) es una variable teórica clave de la macroeconomía dominante. Un concepto muy similar -aunque no idéntico- es la Nawru (Non-accelerating wage inflation rate of unemployment). Dado que no disponemos de estimaciones oficiales de la Nairu pero sí de la Nawru, suministradas por la Comisión Europea homogéneamente para un amplio abanico de países, la opción que hemos tomado es utilizar estas estimaciones que pueden considerarse como una aproximación a la Nairu.

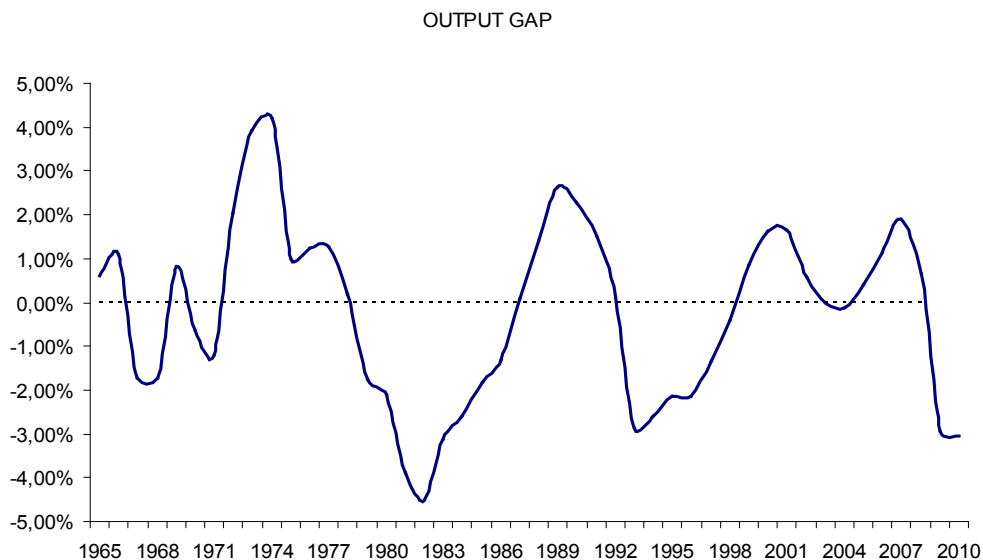
<sup>15</sup> No se debe perder de vista que la evolución del precio de la vivienda, que en estos años llega a registrar hasta un 18%, no forma parte del cálculo oficial de la inflación. Véase al respecto Bellod Redondo (2009).

**Gráfico 1**



**Fuente:** Ameco Database, Comisión Europea

**Gráfico 2**



**Fuente:** elaboración propia a partir de datos de Anexo

## CONCLUSIONES

La utilización de la función de producción Cobb – Douglas tiene un protagonismo creciente en las investigaciones acerca de la posición cíclica de la economía española. Tales investigaciones han recibido un importante impulso de manos de la Ley General de Estabilidad Presupuestaria, así como del interés por los factores que afectan al crecimiento potencial. Los investigadores que la emplean suelen hacerlo en combinación con la variable Nairu. Este creciente protagonismo contrasta con el descrédito que el concepto “función de producción agregada” había acumulado ya en los años 60, tanto a nivel teórico como empírico.

Hemos procedido a exponer de modo sintético el uso dado a la función de producción Cobb – Douglas en tales investigaciones. Posteriormente hemos realizado una serie de pruebas econométricas tanto al modelo de Solow original como a la versión que emplean tales investigaciones. Tales pruebas demuestran que la función de producción Cobb – Douglas no refleja válidamente la conexión entre nivel de producción y factores productivos. Es más: su uso combinado con la Nairu ofrece una visión distorsionada del curso de la actividad económica española ya que estaban dando una falsa apariencia de crecimiento equilibrado.

## BIBLIOGRAFÍA

Antrás, Paul (2004): “Is the US Aggregate Production Function Cobb – Douglas? New Estimates of the Elasticity of Substitution”, *Contributions to Macroeconomics*, vol. 4, nº 1.

Arrow, K. J.; Chenery, H. B.; Minhas, B. S. y Solow, R. M. (1961): “Capital – Labor Substitution and Economic Efficiency”, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 43, p. 225 – 250.

Banco de España (2007): “La Respuesta a la Consulta del Ministerio de Economía y Hacienda en Cumplimiento del Artículo 8.2 de la Ley General de Estabilidad Presupuestaria y la Difusión de las Proyecciones Macroeconómicas del Banco de España”, *Boletín Económico*, abril.

Bellod Redondo, José Francisco (1999): “Prueba de Causalidad y Determinación de la NAIRU”, *El Trimestre Económico*, nº 264, pp. 663 – 692.

Bellod Redondo, José Francisco (2009); “El Precio de la Vivienda y la Inflación en España”, *El Trimestre Económico*, Vol. LXXVI (2), nº 302, abril – junio, pp. 379 – 405.

Blaug, Mark (1985): *Teoría Económica en Retrospección*, Fondo de Cultura Económica, Madrid.

Bouthevillain, C.; Cour – Thimann , P.; Van Den Dool, G.; Hernandez de Cos, P.; Langenus, G.; Mohr, M.; Momigliano, S. y Tujula, M. (2001); "Cyclically Adjusted Budget Balances: An Alternative Approach"; *European Central Bank Working Paper* nº 77.

Burns, Arthur y Mitchell, Wesley (1946): *Measuring Business Cycles*, National Bureau of Economic Research.

Cassel, Gustav (1918): *Theoretische Sozialökonomie*; Leipzig: C. F. Winter.

Cobb, C. W. y Douglas, P. H. (1928): "A Theory of Production"; *American Economic Review*, vol. 18, pp. 139 – 165.

Comisión Europea (2007); *European Economy*, nº 8.

Cubel, Antonio y Palafox, Jorge (2002): "El Stock de Capital Productivo de la Economía Española, 1900 – 1990", Working Paper EC 2002 – 06, IVIE.

De Lamo, A. R. y Dolado, J. J. (1993); "Un Modelo del Mercado de Trabajo y la Restricción de Oferta en la Economía Española"; *Investigaciones Económicas*, Vol. XVII (1), pp. 87 – 118.

Denis, C.; Mc Morrow, K. y Röger, W. (2002): "Production Function Approach to Calculating Potential Growth and Output Gaps – Estimates for the EU Member States and the US", *Economic Papers*, nº 176, septiembre.

Denis, C.; Grenouilleau, D.; Mc Morrow, K. y Roeger, W. (2006): "Calculating Potential Growth Rates and Output Gaps — a Revised Production Function Approach", *European Economy — Economic Papers*, No 247, Economic and Financial Affairs DG of the European Commission.

Douglas, Paul (1948): "Are there Laws of Production?", *American Economic Review*, vol. 38, pp. 1 – 41.

Douglas, Paul (1976): "The Cobb – Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing, and Some Empirical Values", *Journal of Political Economy*, vol. 84, pp. 903 – 115.

Estrada, Ángel; Hernández de Cos, Pablo y Jareño, Javier (2004): "Una Estimación del Crecimiento Potencial de la Economía Española", *Documentos Ocasionales*, nº 0405, Banco de España.

Estrada, Ángel y Hernández de Cos, Pablo (2009): "El Precio del Petróleo y su Efecto sobre el Producto Potencial", *Documentos Ocasionales*, nº 0902, Banco de España.

Estrada, Ángel; Hernando, Ignacio y López – Salido, José David (2000): "Measuring the Nairu in the Spanish Economy", *Documento de Trabajo* nº 0009, Banco de España.

Felipe, Jesús y Adams, F. Gerard (2005): "The Estimation of the Cobb – Douglas Function: a Retrospective View", *Eastern Economic Journal*, vol. 31, nº 3, summer, pp. 427 – 445.



Felipe, Jesús y Fisher, Franklin (2001): "Aggregation in Production Functions: What Applied Economists Should Know", *Metroeconomica*, Volume 54, Issue 2 - 3, May 2003, pp. 208 - 262.

Felipe, Jesús y McCombie, John Stuart Landreth (2005): "La Función de Producción Agregada en Retrospectiva"; *Investigación Económica*, vol XIV, nº 253, julio - septiembre, pp. 43 - 88.

Fisher, F. M. (1969): "The Existence of Aggregate Production Functions", *Econometrica*, vol 37, nº 4, pp. 553 - 577.

Flores Pizarro, María (2000): "El Filtro Baxter - King, Metodología y Aplicaciones", Documento de Trabajo DIE - NT - 01 - 2000, Banco Central de Costa Rica.

Flux, Alfred William (1894): "Review of P. H. Wicksteed's Essay", *Economic Journal*, vol 4, pp. 305 - 308.

Freire - Serén, María Jesús (2001): "Human Capital Accumulation and Economic Growth"; *Investigaciones Económicas*, vol. XXV (3), pp. 585 - 602.

Gómez García, Francisco y Usabiaga Ibáñez, Carlos (2001): "¿Dónde Está Situada la Nairu de la Economía Española?", *Boletín Económico de ICE*, nº 2690, abril - mayo, pp. 9 - 18.

Guay, Alain y St - Amant, Pierre (1997): "Do the Hodrick-Prescott and Baxter-King Filters Provide a Good Approximation of Business Cycles?", Working Paper nº 53, Bank of Canada.

Hirschman, Albert (1977): *Salida, Voz y Lealtad*, Fondo de Cultura Económica, México.

Hobson, John Atkinson (1909): *The Industrial System*; London: Longmans.

Izquierdo, Mario y Regil, Ana (2006): "Actualización de las Estimaciones de la Tasa de Desempleo Estructural de la Economía Española", *Boletín Económico*, septiembre, pp. 57 - 62, Banco de España.

Izquierdo, Mario y Jareño, Javier (2007): "Estimaciones del Crecimiento Potencial de la Economía Española", *Boletín Económico*, enero, pp. 75 - 80, Banco de España.

Klein, Lawrence (1946 a): "Macroeconomics and the Theory of Rational Behavior", *Econometrica*, Vol.14, No.2 (April), pp. 93 - 108.

Klein, Lawrence (1946 b): "Remarks on the Theory of Aggregation", *Econometrica*, Vol.14, No.4 (October), pp. 303 - 312.

Leontief, Wassily (1941): *The Structure of the American Economy: 1919 - 1939, an empirical application of equilibrium analysis*, Harvard University Press.

Mankiw, G.; Romer, D. y Weill, D. N. (1992): "A Contribution to the Empirics of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 102, pp. 407 - 437.

Manrique, Marta y Marqués, José Manuel (2004): "Una Aproximación Empírica a la Evolución de la Tasa Natural de Interés y el Crecimiento Potencial", *Documento de*

*Trabajo*, nº 0416, Banco de España.

Murillo, Inés y Usabiaga, Carlos (2003): "Estimaciones de la Tasa de Paro de Equilibrio de la Economía Española a partir de la Ley de Okun", *Papeles de Trabajo*, 15/03, Instituto de Estudios Fiscales, Madrid.

Ortega, Eva; Ferraz, Eva y Hurtado, Samuel (2007): "Actualización del Modelo Trimestral del Banco de España", *Boletín Económico*, junio, pp. 57 - 65, Banco de España.

Phelps Brown, E. H. (1957), "The Meaning of the Fitted Cobb - Douglas Function", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 71. pp. 546 - 560.

Robinson, Joan (1954): "La Función de Producción y la Teoría del Capital", *Review of Economic Studies*, vol XXI, n 55 [edición española en *Ensayos Críticos*, editorial Orbis, 1988].

Shaikh, Anwar (1974): "Laws of Production and Laws of Algebra: The Humbug Production Function", *Review of Economics and Statistics*, Vol. LVI, pp. 115 - 120.

Shaikh, Anwar (1980): "Laws of Production and Laws of Algebra: Humbug II", In Edward J. Nell (ed.), *Growth, Profits and Property, Essays in the Revival of Political Economy*; pp. 80 - 95, Cambridge: Cambridge University Press.

Shaikh, Anwar (1987): "Humbug Production Function", in Eatwell, J., Milgate, M. and Newman, P. (eds) *The New Palgrave. A Dictionary of Economic Theory and Doctrine*; London: Macmillan.

Solow, Robert Merton (1956): "A Contribution to the Theory of Economic Growth"; *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70 (1), pp. 65 - 94.

Solow, Robert Merton (1957): "Technical Change and the Aggregate Production Function", *Review of Economics and Statistics*, Vol. 39, pp. 312 - 320.

Sosvilla - Rivero, Simón y Alonso Meseguer, Javier (2005): "Estimación de una Función de Producción MRW para la Economía Española, 1910 - 1995", *Investigaciones Económicas*, vol. XXIX (3), pp. 609 - 624.

Wicksteed, Philip Henry (1894): *An Essay on The Co - Ordination of the Law of Distribution*; MacMilland and Co, London.

## ANEXO

A continuación se ofrece una lista con las principales variables utilizadas y sus fuentes. Todos los datos proceden de Ameco Database (Comisión Europea).

$y_t$ : PIB a precios constantes. Miles de millones de euros a precios del año 2000.

$L_t$ : población ocupada según Contabilidad Nacional. Miles de personas.

$N_t$ : Población activa. Miles de personas.

$K_t$ : Stock neto de capital a precios constantes. Miles de millones de euros a precios del año 2000.

$U_t$ : tasa de paro.

$U_t^N$ : NAWRU. Los datos están disponibles a partir de 1965.

$\alpha_t$ : participación de las rentas del trabajo en el PIB. Media del periodo 1960 - 2010: 0,476648. Fuente: AMECO Database.

$1-\alpha_t$ : ídem rentas del capital. Media del periodo 1960 - 2010: 0,523352.

DATOS DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN: ESPAÑA							
año	Stock de Capital (miles de millones de € del año 2000)	Ocupados (miles de personas)	PIB (miles de millones de € del año 2000)	Participación rentas trabajo	Participación rentas capital	PTF	Filtro Hodrick - Prescott
	$K_t$	$L_t$	$y_t$	$\alpha_t$	$1-\alpha_t$	$A_t$	$\tilde{A}_t = hp(A_t)$
1960	373,773	12368,163	124,5911	0,4033	0,5967	0,0629	0,0667
1961	381,845	12393,434	139,3398	0,4000	0,6000	0,0695	0,0704
1962	392,112	12498,731	152,3045	0,4015	0,5985	0,0746	0,0742
1963	404,884	12562,962	165,6442	0,4138	0,5862	0,0796	0,0778
1964	420,457	12628,107	175,8933	0,4197	0,5803	0,0826	0,0814
1965	440,626	12690,835	186,8926	0,4268	0,5732	0,0855	0,0847
1966	464,678	12752,197	200,4347	0,4398	0,5602	0,0890	0,0879
1967	491,417	12854,747	209,1342	0,4503	0,5497	0,0898	0,0910
1968	519,94	12962,867	222,9306	0,4405	0,5595	0,0926	0,0938
1969	552,045	13073,298	242,7883	0,4402	0,5598	0,0973	0,0965
1970	584,249	13159,877	253,0962	0,4508	0,5492	0,0982	0,0990
1971	613,175	13228,7	264,8629	0,4628	0,5372	0,0999	0,1013
1972	649,52	13269,152	286,447	0,4789	0,5211	0,1047	0,1033
1973	693,402	13533,094	308,7575	0,4844	0,5156	0,1080	0,1051
1974	740,745	13627,869	326,1053	0,4908	0,5092	0,1099	0,1066
1975	782,763	13406,061	327,873	0,5094	0,4906	0,1082	0,1079
1976	822,431	13262,743	338,7052	0,5207	0,4793	0,1094	0,1089

1977	860,351	13170,615	348,3212	0,5209	0,4791	0,1103	0,1097
1978	895,495	12941,603	353,4155	0,5219	0,4781	0,1105	0,1104
1979	925,545	12723,048	353,564	0,5202	0,4798	0,1095	0,1111
1980	955,434	12336,027	358,1624	0,5130	0,4870	0,1107	0,1117
1981	981,974	12040,596	357,6841	0,5130	0,4870	0,1103	0,1123
1982	1007,682	11937,004	362,1418	0,5049	0,4951	0,1106	0,1131
1983	1030,573	11895,727	368,5566	0,5015	0,4985	0,1114	0,1138
1984	1047,474	11629,705	375,1291	0,4752	0,5248	0,1137	0,1147
1985	1066,906	11510,314	383,8372	0,4645	0,5355	0,1158	0,1156
1986	1093,165	11777,132	396,3272	0,4595	0,5405	0,1168	0,1165
1987	1127,556	12341,384	418,3114	0,4621	0,5379	0,1186	0,1173
1988	1171,765	12773,808	439,6206	0,4653	0,5347	0,1202	0,1180
1989	1225,997	13236,708	460,8441	0,4708	0,5292	0,1209	0,1186
1990	1284,971	13739,87	478,2786	0,4881	0,5119	0,1203	0,1191
1991	1343,733	13945,9	490,4432	0,5006	0,4994	0,1197	0,1195
1992	1395,337	13729,81	495,0055	0,5061	0,4939	0,1193	0,1197
1993	1434,36	13320,78	489,9005	0,5109	0,4891	0,1181	0,1199
1994	1473,587	13290,15	501,5747	0,4964	0,5036	0,1193	0,1201
1995	1519,278	13571,8	515,405	0,4886	0,5114	0,1195	0,1203
1996	1565,341	13791,5	527,8624	0,4900	0,5100	0,1195	0,1204
1997	1614,472	14293,6	548,2838	0,4964	0,5036	0,1201	0,1205
1998	1675,233	14930,3	572,782	0,4952	0,5048	0,1205	0,1205
1999	1745,955	15614,3	599,9658	0,4956	0,5044	0,1209	0,1204
2000	1822,704	16399,1	630,263	0,4953	0,5047	0,1213	0,1203
2001	1903,081	16920	653,255	0,4917	0,5083	0,1211	0,1201
2002	1985,022	17328,7	670,9204	0,4872	0,5128	0,1203	0,1197
2003	2072,783	17874,5	691,6947	0,4835	0,5165	0,1195	0,1192
2004	2164,963	18494	714,2912	0,4769	0,5231	0,1187	0,1187
2005	2265,856	19249,5	740,108	0,4741	0,5259	0,1178	0,1180
2006	2376,532	19998,4	769,8502	0,4720	0,5280	0,1174	0,1173
2007	2491,3	20604,1	797,3668	0,4767	0,5233	0,1169	0,1165
2008	2588,704	20532,6	804,2231	0,4883	0,5117	0,1158	0,1157
2009	2644,486	19165,7	774,2854	0,4904	0,5096	0,1139	0,1149
2010	2718,967	18729,2	773,1724	0,4789	0,5211	0,1133	0,1141

**Notas:** elaboración propia,  $\lambda_i = 100$ .

ESTIMACIÓN DEL OUTPUT GAP CON FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN						
año	PIB (miles de millones de € del año 2000) $y_i$	Población Activa (miles de personas) $N_i$	Nawru $U_i^N$	Ocupados con tasa de paro Nawru (miles de personas) $N_i \cdot (1 - U_i^N)$	Producción Potencial (miles de millones de € del año 2000) $y_i^p$	Output Gap
1965	186,8926	13022,235	2,00%	12.761,6	185,7	0,62%
1966	200,4347	13034,297	2,00%	12.773,4	198,3	1,09%
1967	209,1342	13244,447	2,00%	12.979,4	212,8	-1,73%
1968	222,9306	13355,867	2,10%	13.074,9	226,9	-1,73%
1969	242,7883	13402,298	2,39%	13.081,5	240,8	0,81%
1970	253,0962	13505,977	2,91%	13.112,7	254,8	-0,65%
1971	264,8629	13687,6	3,62%	13.191,6	268,1	-1,19%
1972	286,447	13659,052	4,22%	13.083,2	280,8	2,03%
1973	308,7575	13890,094	4,77%	13.227,2	297,1	3,92%
1974	326,1053	14057,869	5,31%	13.312,0	312,9	4,21%
1975	327,873	14028,061	5,86%	13.206,4	324,6	1,00%
1976	338,7052	13944,743	6,32%	13.062,9	334,5	1,25%
1977	348,3212	13911,915	6,78%	12.968,7	344,0	1,27%
1978	353,4155	13937,203	7,38%	12.908,3	352,7	0,20%
1979	353,564	13962,548	8,13%	12.827,8	359,9	-1,75%
1980	358,1624	13960,127	9,19%	12.676,8	365,9	-2,11%
1981	357,6841	14053,996	10,44%	12.587,4	372,1	-3,87%
1982	362,1418	14232,204	11,71%	12.566,3	379,3	-4,52%
1983	368,5566	13900,027	12,55%	12.155,4	380,4	-3,11%
1984	375,1291	13960,205	13,61%	12.060,3	385,1	-2,59%
1985	383,8372	14012,014	14,34%	12.003,2	391,0	-1,83%
1986	396,3272	14272,532	14,77%	12.165,1	401,6	-1,30%
1987	418,3114	14827,884	15,02%	12.600,9	418,0	0,08%
1988	439,6206	15172,708	15,16%	12.872,1	433,5	1,42%
1989	460,8441	15378,608	15,16%	13.047,0	449,0	2,64%
1990	478,2786	15774,27	15,19%	13.378,3	467,6	2,29%
1991	490,4432	15991,9	15,20%	13.561,1	483,2	1,51%
1992	495,0055	16040,91	15,27%	13.590,7	494,4	0,13%
1993	489,9005	16209,58	15,47%	13.701,3	504,4	-2,87%
1994	501,5747	16382,15	15,46%	13.850,1	514,9	-2,59%
1995	515,405	16528	15,22%	14.011,7	526,8	-2,16%
1996	527,8624	16720,6	14,93%	14.225,0	539,5	-2,15%
1997	548,2838	17078,7	14,43%	14.615,0	555,8	-1,35%
1998	572,782	17475	13,77%	15.068,4	575,1	-0,40%

1999	599,9658	17773,5	12,95%	15.472,4	594,9	0,85%
2000	630,263	18378,7	12,16%	16.143,3	620,2	1,62%
2001	653,255	18796,8	11,41%	16.652,1	642,5	1,67%
2002	670,9204	19423,8	10,88%	17.311,1	667,1	0,57%
2003	691,6947	20048,1	10,42%	17.958,9	691,7	0,00%
2004	714,2912	20637,8	10,17%	18.539,9	715,1	-0,11%
2005	740,108	21162	10,13%	19.018,2	737,2	0,39%
2006	769,8502	21835,5	10,48%	19.546,7	761,2	1,14%
2007	797,3668	22438	11,15%	19.936,7	782,4	1,91%
2008	804,2231	23123,2	12,33%	20.272,6	799,1	0,64%
2009	774,2854	23315,2	14,07%	20.035,9	797,8	-2,94%
2010	773,1724	23361,6	15,58%	19.722,9	797,5	-3,05%

**Notas:** elaboración propia,  $\lambda_i = 100$ .