

¿CRECIMIENTO O DESARROLLO?¹

András Bródy²

Resumen

Al parecer, el objeto de la Economía está cambiando. Tras escrutar los límites del crecimiento, se están imponiendo, sin prisa pero sin pausa, sustanciales cambios en la problemática, el método y el enfoque de esta disciplina, así como en el uso de sus términos y conceptos. Por ejemplo, los debates sobre el "equilibrio" son substituidos por la exploración de "vías sostenibles". En vez de descubrir cómo producir "más" se buscan mercancías "mejores", "más baratas" y "reciclables". En general, la contrapartida del ahorro de fuerza de trabajo consiste en la reducción de la semana laboral y en modificaciones del "ciclo vital" estándar, más que en un incremento de la producción de plusvalía. Los mercados de los países desarrollados se saturan más fácilmente y sus recesiones son más profundas. Un marketing cada vez más vigoroso y agresivo corrobora estas tendencias. Es hora, pues, de modernizar nuestros viejos métodos, de revisar los antiguos modelos de análisis y de previsión. Por tanto, conviene renovar los conceptos obsoletos y facilitar la llegada de un futuro ordenado y

¹ Versión original: *Acta Oeconomica*, vol. 61 (2) páginas 131-142 (2011) <http://dx.doi.org/10.1556/AOecon.61.2011.2.2> Traducido por Alfons Barceló y Manuel Muiños.

² András Bródy, 1924-2010, científico, economista y ciudadano (por Julio Sánchez Chóliz)

Nacido en Budapest en 1924, murió en diciembre de 2010 dejando detrás una larga vida de 86 años, en un claro ejemplo de cómo puede abordarse, aún en las peores situaciones, una trayectoria científica y personal honesta, valiosa y socialmente útil. Nació en el seno de una familia burguesa bien acomodada, propietaria de una empresa editorial. Finalizó sus estudios de secundaria en 1943 y, a pesar de la guerra, estudió Matemáticas, obteniendo el Bachellor en 1945. Tras la II Guerra Mundial, el Gobierno comunista húngaro nacionaliza la empresa familiar pero sigue trabajando en ella como Director, trabajo que compagina con sus estudios de economía en la Universidad de Budapest. Por su origen burgués, fue forzado a trabajar como tornero algunos años más tarde, pero siguió formándose y obtuvo en 1952 un Máster en Economía industrial, alcanzado su doctorado en 1960. En 1955 ingresó en el Instituto de Economía de la Academia húngara de ciencias.

En los años 50, su trabajo como estadístico y la elaboración de una tabla input-output para la Diosgyöry Foundry Company le acercaron al campo del input-output, lo que marcó toda su vida investigadora y profesional. Así fue cofundador en 1987 de la International Input-Output Association y en 1989 de su revista *Economic Systems Research*, de la que fue su primer editor.

Hasta la caída del sistema socialista, fue un economista reformista y una de las pocas voces que en Hungría denunciaron las deficiencias económicas del sistema socialista. Sus posiciones fueron también críticas con el

A. Bródy

planeado con prudencia. Este ensayo se ocupa no tanto de discutir las propiedades de los raros y singulares puntos de equilibrio, sino de explorar el comportamiento y el movimiento del sistema económico en las proximidades de dichos estados ideales (quizá nunca alcanzados).

Palabras clave: *crecimiento, desarrollo, equilibrio, modelo Von Neumann.*

Abstract

The task of economics is apparently changing. After confronting the limits to growth, the economic interests, methods and thoughts, even its use of words and concepts are slowly but persistently modified. The discussion of "equilibrium" is replaced by the concern for a "sustainable path". Instead of finding out how to produce "more" it looks for "better", "cheaper" and "recyclable" commodities. Labor saving serves by and large the reduction of the working week and transformation of the life-cycle instead of surplus-production. The markets of developed countries are more easily glutted and their recessions deeper. The ever louder and more aggressive marketing attests to all this. It is high time to renew our old ways, to revisit the aged analytical and forecasting models. The renovation of obsolete concepts is rendered necessary to facilitate the introduction of an orderly and planned future of prudence. This investigation focuses less on the seldom, perhaps never occupied point of equilibrium, rather on the behavior and motion of the economic systems in its vicinity.

Key Words: *growth, development, equilibrium, von Neumann model.*

proceso de transición de las economías planificadas a economías de mercado, defendiendo una transición más lenta que permitiera una mejor evolución de las instituciones y a un menor coste social. Su capacidad para mirar la realidad y analizarla de una manera crítica le acompañaron hasta la muerte, y este artículo es que va a publicarse con esta nota es una prueba más de ello. Frente a la visión neoclásica de un equilibrio estacionario y estático, él defiende el no-equilibrio o una concepción del equilibrio como una referencia dinámica que incluye ciclos y cambios estructurales.

Su activa vida investigadora le llevó a visitar y a trabajar en numerosos lugares, aunque nunca abandonó su país natal. Estuvo en los Estados Unidos, pero también fue profesor en la Universidad de Lusaka (Zambia) durante varios años, y profesor visitante en Delhi, Niza, Melbourne y Tokio.

Su obra más conocida, *Proportions, Prices and Planning: A Mathematical Restatement of the Labor Theory of Value*, sigue la senda de Leontief y Von Neumann, abordando la modelización algebraica de los conceptos de valor de Marx y conectando estos conceptos con los modelos económicos multisectoriales que se desarrollaron en los países occidentales. Ello abre una senda profunda y fructífera, que ha permitido a muchos economistas, junto con otras muchas influencias como las de Sraffa, Pasinetti, Morishima, Steedman,... romper con la ortodoxia fundamentalista marxista y avanzar hacia análisis más dinámicos, sostenibles, realistas y rigurosos. En este viaje también les acompañaron investigadores de otras muchas sensibilidades.

Cerremos, por brevedad, estos comentarios con algo que A. Bródy señaló en otra de sus obras más conocidas, *Slowdown: Global Economic Maladies*, publicada en 1985; los ciclos económicos existen, las crisis volverán a presentarse y todos deberíamos prepararnos para ellas, la crisis de 1930 volverá. En estos momentos en que los economistas dudamos de nuestra capacidad para entender el mundo, quizás convenga recordar que un buen científico, que amaba la ciencia económica, fue capaz de defender algo que muchos rechazaban pero que la realidad ha demostrado como cierto. Sigamos su ejemplo.

INTRODUCCIÓN

El modelo de Equilibrio Económico General de John von Neumann fue el primer esquema moderno, matemáticamente riguroso, dedicado a explorar la selección de bienes y de procesos productivos, que son dos asuntos clave para el desarrollo³. Con todo, dicho modelo no pretendía describir o simular los mecanismos económicos subyacentes; sólo quería mostrar que aceptando, por hipótesis, ciertos supuestos iniciales podía existir un equilibrio general de los mercados, y que los correspondientes procesos económicos tenían un punto fijo positivo⁴. Por consiguiente vale la pena estudiarlo, porque no es una quimera, ni puede ser objetado matemáticamente como era el caso para los primeros ejercicios de Walras y otros economistas anteriores con parecida dirección. Ahora bien, no sugirió formas de implementar y resolver el modelo. No explicó cómo recopilar los datos pertinentes ni aseguró la unicidad del resultado. No planteó ninguna optimalidad de la solución ni propuso evaluar sus magnitudes de ninguna forma concreta. Sólo explicó que este equilibrio puede ser ideado sin caer en el absurdo. Ciertamente el modelo abrió una nueva vía para la teoría económica, pero este camino resultó ser poco practicable, muy laborioso incluso con la ayuda de ordenadores, y se reveló afectado de dificultades inesperadas. Se fue evidenciando que, aunque la tarea de encontrar el equilibrio de Von Neumann fuera teóricamente posible, su proyección sobre las economías efectivas no parecía ser ni realizable ni necesaria. La cuantificación de las variables puede resultar analíticamente interesante, pero, si se introdujera, dificultaría cualquier desarrollo ulterior y actuaría como una barrera.

Para abordar estas tareas pronto empezaron a usarse modelos de otras especies, que lograron una mejor simulación y planificación de las relaciones económicas. En muchas ocasiones ciertas tareas fueron resueltas merced al "modelo simple" de Leontief, un esquema teórico que tuvo como precursor los "balances materiales" soviéticos, y que casaba muy bien con el objetivo de elaborar y analizar estadísticamente la economía y el plan nacional de ingresos y rentas. Su aparente sencillez se derivó del uso de matrices cuadradas en vez de rectangulares, con sus filas y columnas dedicadas a las mismas mercancías y servicios.

Von Neumann tomó un camino más complejo. Presentó las mercancías en columnas y los procesos en filas. Abordó el asunto de las empresas que producen más de un producto, lo que comporta que no resulta obvio cómo desagregar e imputar costes a cada bien por separado. Por otra parte, también resulta difícil de medir la demanda y oferta de cada producto. Desde luego, los costes y los ingresos de los procesos son más fáciles de observar, mientras que con los productos es su producción y consumo lo que se presta a ser comprobado con más exactitud. Von Neumann

³ El modelo de Von Neumann representa una trayectoria de crecimiento proporcional con la mayor tasa de crecimiento posible, conocidos los procesos de producción potenciales. Estamos ante un crecimiento proporcional cuando los procesos operan con la misma tasa de crecimiento. La selección de procesos consiste en determinar cuáles deberían usarse por ser rentables y cuáles no, por no serlo (N. del T.)

⁴ Así como también que existe un "sistema de valoración" que nos permite enjuiciar y analizar las economías efectivas.

manejó, pues, la aproximación clásica de "regulación cruzada", esto es, el desequilibrio de precios actúa sobre las cantidades, y el desequilibrio de cantidades regula los precios.

A pesar de su aparente mayor realismo el modelo de Von Neumann es difícil de resolver. Poco a poco empezamos a comprender su configuración, pero todavía no disponemos de un algoritmo rápido y simple para hallar las soluciones. Está ahora bien demostrado que si conocemos los productos y procesos que satisfacen sus muy estrictas condiciones, cabe hallar un espacio nulo con coordenadas positivas. Por añadidura, si conocemos los procesos y productos que pueden subsistir juntos en equilibrio, entonces la solución requiere computar un conjunto de ecuaciones lineales. Sin embargo, sobre todo en sistemas grandes, el proceso de selección resulta largo, tedioso e inestable⁵. La idea de encontrar las partes constituyentes de una economía real que pueden coexistir en una situación de equilibrio general y hacer superfluo, incluso excluir, el funcionamiento de cualquier otro producto o proceso no parece realista. Por tanto revisamos a continuación este procedimiento de selección. Primero, fijamos la atención sobre los postulados matemáticos del modelo y las justificaciones aducidas por el autor; en segundo lugar examinamos lo que puede ocurrir en los mercados reales.

PROCEDIMIENTO DE SELECCIÓN

Von Neumann parecía no estar del todo seguro de la existencia de solución, pero se aseguró de ello postulando condiciones suficientes. A continuación expresó con palabras sencillas lo que significaban esas condiciones de equilibrio. En otras palabras, asumió que conocemos todos los componentes de una solución, incluida la tasa de interés. Luego interpretó sus ecuaciones⁶ de la forma siguiente:

- un *proceso* es activado, si obtiene la tasa de interés de equilibrio. Si en equilibrio su rentabilidad es menor, entonces no será usado,
- un *bien* tiene un precio, si se produce la cantidad de equilibrio. Si en equilibrio se produce más de lo necesario, entonces su precio es cero.

El asunto es difícil y complicado. El modelo entrevé una resolución que depende de las propiedades estructurales del sistema (su tasa de crecimiento y su tasa de interés), al tiempo que el valor de estos parámetros depende de las previas selecciones de procesos y bienes. Así que el resultado final depende forzosamente de la trayectoria. Esta dependencia de la trayectoria significa que el conjunto de las decisiones a las que uno se enfrenta en circunstancias dadas cualesquiera está condicionado por las decisiones que tomó en el pasado, incluso si estas circunstancias pasadas ya no son ahora relevantes. No es casualidad que la selección nos recuerde al principio

⁵ Los espacios nulos pueden ser fácilmente desestabilizados por cambios infinitesimales.

⁶ Sus ecuaciones 7, 7', 8 y 8'.

A. Bródy

darwiniano. Y tenemos que añadir que hoy la genética y la psicología discuten acaloradamente el darwinismo y el principio de la "supervivencia del más apto" precisamente por su dependencia de la trayectoria. Hay que reconocer, en efecto, las dificultades relacionadas con este principio, así como las consiguientes implicaciones. Y conviene subrayar que muchas de estas dificultades se derivan del significado ambiguo de una expresión poco feliz: "el más apto".⁷

RÉPLICA

En la práctica, la selección anterior puede ser interpretada y llevada a cabo. Pero, por lo general, la introducción de una nueva tecnología o un nuevo producto no son asuntos de "filo de navaja". Suponer que el "desplazamiento de capital" se desencadena por una 'pizca' de discrepancia con la rentabilidad de equilibrio fue meramente una hipótesis de trabajo de Ricardo. Dicho autor explicó cómo y por qué hay un impulso hacia la tasa de equilibrio, y sostuvo que el equilibrio significa que el "desplazamiento de capital" se detiene. Ahora bien, todos estamos familiarizados con la competencia del día a día y sabemos que las empresas experimentan y sobreviven a discrepancias mucho más grandes que una 'pizca'. No se arroja café al mar porque unos granos queden sin vender. Uno no se retira súbitamente del mercado cuando el precio desencadena alguna pérdida marginal durante un lapso temporal. Los competidores por lo común no saben (nadie lo sabe, en verdad) la cuantía exacta de las tasas promedio.

DEFENSA

Mas sin embargo es ahora cuando precisamos de la agudeza teórica: esa es la fuerza del razonamiento matemático. Si asumimos que un equilibrio de este género se mantiene durante un tiempo, entonces un proceso obsoleto o una mercancía superflua tienen que causar pérdidas que se vuelven intolerables, de forma lenta pero inexorable. Se impone, pues, trazar una línea divisoria, y el modelo la traza en el lugar correcto. Esta línea divisoria se modifica (en principio) con cada cambio tecnológico, pero existe siempre. Y todo esto prueba muy claramente que las economías pueden mejorar su eficiencia, aunque no se encaminen hacia el equilibrio, o aunque jamás logren aposentarse en este estado ideal llamado equilibrio.

⁷ La dependencia de la trayectoria implica que las selecciones "mejores" u "óptimas" no existen. Fodor no toca estos últimos problemas, mejor discutidos en física y matemática —pero aquí dejamos a un lado la cuestión de la posible pérdida de integridad.

COROLARIO

Ambos enfoques son correctos y tienen su grano de verdad. Sin embargo, el mundo real no funciona tan "exactamente". Una "pizca" es una cuantía infinitesimal, por lo tanto teóricamente más pequeña incluso de lo que puede manejar el ordenador. Y así surge un problema difícil. ¿Es correcto asumir que "conocemos" estas dos magnitudes, la tasa de crecimiento y la tasa de interés, "exactamente"? No se pueden conocer con semejante precisión final y no lo serán nunca. Está bien asumir que la gente en el mercado tiene una idea de las tasas promedio. Pero esto significa conocerlas aproximadamente. Digamos, alrededor del 3 por ciento anual. Uno podría preguntar: ¿es correcto asumir que se alcanza el equilibrio exacto antes de que empecemos a probar que existe?. Podemos responder que sí, dado que matemáticamente las condiciones de equilibrio se postulan como condiciones necesarias.

El mundo real muestra un desequilibrio constante. Las cotizaciones de las acciones cambian incesantemente en una especie de paseo aleatorio que probablemente es menos suave de lo que se supone. La 'transferencia de capital' actúa continuamente, las plusvalías de las nuevas tecnologías de ayer se van erosionando poco a poco y siempre surgen nuevas oportunidades de inversiones innovadoras. Lo que vemos entonces es una plétora de procesos diferentes que se comportan más cooperativamente de lo que admitiría la "*bellum omnium contra omnes*" de Hobbes o la exacerbada y constante rivalidad de Ricardo. Hemos estado produciendo energía eléctrica durante más de un siglo, y todavía no hemos encontrado la "tecnología más rentable" para hacerlo. Tampoco hay un vencedor absoluto en la fabricación de coches, y con toda probabilidad sobrevivirá más de un tipo de ordenador y de teléfono móvil.

Las nuevas tecnologías que se están difundiendo rápidamente ofrecen mucho más que una "pizca" de ventaja pero por lo general no serían capaces de propagarse si fueran incapaces de cooperar con las antiguas. El cambio real de la base tecnológica es lento y antes de decidir sobre una nueva (o la más nueva) tecnología habitualmente son ponderadas las ventajas de las antiguas. Esto es, las antiguas no requieren inversión mientras la nueva sí. Esta ventaja por lo general alarga el ciclo vital de las más antiguas y las mantiene competitivas. Pero aún así ocurrirá, una y otra vez, que opere el corte del "filo de navaja". ¿Dónde encontraremos ese tipo de situación que conceda oportunidad para las mejoras pero que también se oponga inexorablemente a lo obsoleto?

Ciertamente un equilibrio de ese tipo se puede observar en la misma naturaleza, pero sin un sistema claro de valores. Pero encontraremos un caso más interesante en la obra de Gibbs (1875-1878), precursor muy importante de la moderna Termodinámica fenomenológica. La Termodinámica es el campo donde alcanzar un equilibrio es a menudo un proceso muy largo. Las fuerzas de la Naturaleza siempre necesitan tiempo para desarrollar su efecto. Incluso en Mecánica nada puede ocurrir infinitamente rápido, cosa que Huygens siempre supo y que llevó a Newton a errar por no tomarlo en cuenta. Hizo falta la obra de Einstein para rectificar esto. Aquí, también, algunos requerimientos no mecánicos del tiempo entran en juego. Pero permítasenos primero examinar la obra de Gibbs sobre el equilibrio en Química.

ENFOQUE DE LA TERMODINÁMICA FENOMENOLÓGICA

El principal instrumento conceptual de Gibbs es una función potencial que maximiza la entropía y hace mínima la energía. Él quería calcular una magnitud que permitiera medir en términos relativos las energías de las sustancias heterogéneas que “cooperan”, en un sistema químico. La idea básica (y la primera afirmación) de su obra fue que en la naturaleza la energía se mantiene constante mientras que la entropía aumenta. Por lo tanto un sistema puede encontrarse en equilibrio sólo si hace su entropía máxima y su energía mínima. Si queremos operar en un sistema de este tipo con la mayor eficiencia entonces buscaremos su máximo rendimiento; o sea, si la energía es constante entonces su entropía debe ser máxima, y si su entropía es constante entonces su energía debe ser mínima. Conviene señalar que mientras que en la economía el coeficiente de eficiencia debe ser mayor que uno, en termodinámica es siempre necesariamente menor que uno. El calor se desplaza hacia las partes más frías, el dinero hacia la riqueza. El calor se disipa mientras que el dinero se concentra. Pero en otros aspectos los sistemas de determinación de los valores, su explicación, equilibrio y forma de operar son verdaderamente análogos. Así podemos describir el equilibrio económico como maximizando su rentabilidad (o rendimiento), de manera que:

- el estado de un sistema económico está en equilibrio si no puede ser mejorado por métodos económicos:
- o sea, que con inputs dados el output se hace máximo,
- o bien, si se minimizan los inputs para un output dado.

Tanto el máximo como el mínimo están caracterizados por la anulación del gradiente (las derivadas) de una función potencial (que es el cociente entre output e input). La función potencial por lo tanto mide la eficiencia del proceso. Hace esto describiendo el efecto de todas las posibles interdependencias de los procesos termodinámicos o económicos y las mercancías. Este es un punto fijo (punto de simetría) que expresa las transformaciones posibles y mensurables.

La anulación de la derivada puede ser interpretada indistintamente como expresión de una conexión causal o de una relación teleológica. Si es tomada como una “primera integral” constante del sistema, entonces puede significar la conservación de una fuerza o energía —digamos la conservación del valor a través del trabajo efectuado en el sistema. Pero puede también ser concebida como el “objetivo” mejor logrado por los procesos, que resulta de maximizar algún resultado —por ejemplo, la maximización del valor de uso—, entonces éste es un caso de relación teleológica. Esta especie de dualidad fue muy molesta para los físicos de las dos escuelas de la Mecánica clásica: la de Newton y la de Leibniz o d’Alembert. Algo similar ocurre con las dos grandes aproximaciones a la economía: la teoría del valor-trabajo y el enfoque marginalista. Pues bien, aquí vemos que tienen algo en común, expresado por la misma función potencial, que puede ser interpretada de forma diferente, esto es, de ambas maneras. Lejos de ser antagónicas describen la misma importante experiencia práctica. La función potencial refleja balances reales, expresados por alguna igualdad o equilibrio.

¿Cómo se comporta ahora la economía alrededor de este punto de equilibrio? Al principio la opinión estaba dividida. Pero después de la introducción generalizada del pensamiento marginal se sugirió que el punto de equilibrio es también un atractor que orienta a la economía hacia un equilibrio “perfecto”. Adam Smith, a pesar de que casi nunca usa la expresión “equilibrio”, pudo ser leído —correctamente o no— como defendiendo una convergencia o gravitación hacia este punto. Pero puede haber sido malinterpretado. Respaldada por la creencia general en los “rendimientos decrecientes” la profesión comenzó a dar por sentado este equilibrio general, asintóticamente estable y perfecto. Pero también comenzaron a difundirse algunas ideas inconformistas de no-equilibrio constante, esto es, ciertas discrepancias, incluso ideas sobre ciclos periódicos, tal vez en torno al punto de equilibrio. La estabilidad pareció prevalecer, lo que significa que, por muy lejos que la economía se desvíe del equilibrio, su existencia y movimiento no corren peligro y la divergencia no se vuelve infinita. Se sugería, por tanto, que la economía permanecía en cierto modo “cerca” del equilibrio. Al mismo tiempo se aceptaba y se reconocía que este punto de equilibrio tendía a cambiar, precisamente por el desarrollo y cambios de la tecnología.

En cambio, tanto Gibbs como Von Neumann supusieron un equilibrio neutral, de “punto de silla”. Tal equilibrio ni atrae ni es repulsivo. Las estadísticas muestran claramente que las proporciones y las estructuras de todas las economías cambian de forma permanente, pero en general sin prisas. También pueden darse oscilaciones periódicas en torno a un equilibrio cambiante, así como algunas tendencias seculares. Todos estos cambios pueden originarse a partir de ciertos movimientos antisimétricos del mercado. El movimiento regido por la oferta y la demanda fue presentado por Adam Smith como el mecanismo básico de los mercados, y es una característica común de la mayoría de los modelos económicos, biológicos y termodinámicos.

DINÁMICA DEL MERCADO

La pauta básica, aceptada también por Ricardo y todavía dada por sentada como la forma más simple y fundamental de comportamiento, es la siguiente:

- si la demanda de un producto es mayor que su oferta, entonces su precio tiende a subir; en caso contrario, disminuye;
- si la rentabilidad de un proceso supera la media, entonces su producción tiende a ser aumentada; en caso contrario, tiende a bajar.

Estas observaciones tienen validez general. Además son los mismos movimientos que tanto Gibbs como Von Neumann plantean en sus modelos. Esa es la pauta que de hecho prescriben los gradientes de los precios y cantidades alrededor del equilibrio, si lo que se persigue es hacer máximo el output y mínimo el input, así como alcanzar el crecimiento máximo y el interés mínimo. Y este enfoque simple también es pertinente en el dominio de la Termodinámica. En ambos casos encaramos una tarea clara y precisa: maximizar una relación, un cociente. En economía ello representa cuantificar la productividad, esto es la proporción de output por input. En Termodinámica, el

output del sistema es la entropía y el input es la energía. En las matrices del modelo de Von Neumann y en las ecuaciones del modelo de Gibbs se representan las cuantías de las correspondientes magnitudes. En ambos casos encontrar el máximo implica el aumento simultáneo del numerador y la disminución del denominador hasta los respectivos topes compatibles con la permanencia del sistema. El "truco" en ambos casos consiste en elegir apropiadamente las variables que actúan sobre el rendimiento para encontrar el gradiente apropiado.

Si \mathbf{B} es la matriz de inputs y \mathbf{A} la matriz de outputs, \mathbf{p} el vector de precios y \mathbf{x} el vector de cantidades, entonces la función potencial de Neumann (λ , en esencia, también la de Gibbs) es simplemente:

$$\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{pAx} / \mathbf{pBx}. \quad [1]$$

Ésta es una forma bilineal de los vectores positivos \mathbf{p} y \mathbf{x} . Si el divisor \mathbf{pBx} permanece positivo (esto está asegurado si cada fila y columna de la matriz \mathbf{B} tiene al menos un elemento positivo, es decir si cada producto se utiliza en al menos un proceso y cada proceso tiene al menos un producto como input) entonces la forma es continua, positiva y diferenciable. Por lo tanto en un dominio cerrado alcanzará su máximo al menos una vez. Los gradientes toman las siguientes formas:

$$\delta\lambda / \delta\mathbf{p} = (\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{Bx}) / \mathbf{pBx}, \quad [2]$$

y

$$\delta\lambda / \delta\mathbf{x} = (\mathbf{pA} - \lambda\mathbf{pB}) / \mathbf{pBx}. \quad [3]$$

Usando la función potencial el problema minimax toma la siguiente forma:

$$\max_{\mathbf{x} \in S^n} \min_{\mathbf{p} \in S^m} \mathbf{pAx} / \mathbf{pBx} = \min_{\mathbf{p} \in S^m} \max_{\mathbf{x} \in S^n} \mathbf{pAx} / \mathbf{pBx}$$

donde S^n y S^m son los simplex unitarios donde la suma de los elementos de los vectores no negativos \mathbf{x} y \mathbf{p} es 1.

Si queremos hacer mínima la función potencial con respecto a \mathbf{p} entonces tenemos que cambiar su precio en proporción a la cantidad $\lambda\mathbf{Bx} - \mathbf{Ax}$. Ésta es la diferencia entre cantidades de input y output. Y si queremos hacer máxima la función potencial con respecto a \mathbf{x} entonces tenemos que cambiar su output en proporción al valor $\mathbf{pA} - \lambda\mathbf{pB}$. Y ésta es la diferencia entre output e input en términos de valor. Y si el precio de algún producto o la cantidad de algún proceso se mantiene negativo de forma permanente, incluso cuando se alcanza el equilibrio, entonces tiene que hacerse cero. En tal caso el proceso respectivo o la producción de la mercancía ha de interrumpirse. Éste es el principio de selección en el modelo de von Neumann, que puede ser formulado como sigue: $\lambda\mathbf{Bx} - \mathbf{Ax} \leq 0$ y $\mathbf{pA} - \lambda\mathbf{pB} \leq 0$, que son las condiciones usadas en el modelo de referencia.

Tengamos en cuenta, porque este es un punto realmente importante, que el proceso dual precedente escrito en forma matricial se plasma en la siguiente matriz antisimétrica:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \mathbf{B} - \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' - \lambda \mathbf{B}' & 0 \end{bmatrix} \quad [4]$$

Esta forma tiene las propiedades básicas que caracterizan tanto a la economía como a la termodinámica.⁸

Una matriz antisimétrica así tiene los elementos $k_{ik} = -k_{ki}$ por lo que su diagonal principal debe consistir de ceros y $\mathbf{K}^T = -\mathbf{K}$, la traspuesta de la matriz es igual a su negativa. La suma de los autovalores de una matriz es igual a su traza (esto es, la suma de los elementos de la diagonal principal). En este caso, por tanto, suman cero. El determinante de la matriz también es cero. Así que esta matriz contiene un espacio nulo que pertenece al equilibrio y que posee un autovalor cero. El movimiento alrededor del equilibrio será estrictamente perpendicular al radio-vector, dirigido hacia el equilibrio.

Todas estas características dinámicas estaban ya vislumbradas en las obras de Smith, Ricardo y Marx (éste último también notó la naturaleza dual de todos los conceptos económicos), pero hubo que esperar a la teoría matemática de las matrices para que pudieran ser conceptualizadas y probadas. Son, en definitiva, las propiedades básicas y fundamentales de la dinámica del mercado, que inducen y permiten la mejora incesante del sistema económico. En síntesis, no es el punto de equilibrio ni el equilibrio en sí los asuntos importantes, sino la forma del movimiento a su alrededor. Y esta forma es similar a la que detectamos en la naturaleza, la termodinámica o la biología. Cesa de operar cuando la economía se asienta en el equilibrio (o el organismo muere). La sangre vital del sistema económico es realmente el no-equilibrio, la cualidad rebelde de los mercados.

SOBRE LOS CAMBIOS

Los cambios dependientes de la trayectoria, que permanecen en segundo plano durante los períodos de crecimiento extensivo (industrialización o reconstrucción), se vuelven más pronunciados una vez que los rápidos cambios en la tecnología se sitúan en el orden del día. Ponen a prueba nuestros conocimientos matemáticos. Como demostró con creces el desplome de las bolsas de valores, pueden surgir circunstancias ante las cuales nuestro conocimiento estándar de las matemáticas de los mercados de repente resulta no ser idóneo. Incluso puede revelarse como insatisfactorio y hasta inválido. Las herramientas corrientes de la estadística o el

⁸ Esta es la forma pfaiana de la que Carathéodory hace uso cuando desarrolla la teoría axiomática de la termodinámica.

análisis pueden fracasar inesperadamente: entonces nuestro conocimiento rutinario deja de ser operativo. Puede ocurrir, asimismo, que las condiciones previas, tomadas como garantizadas en las matemáticas involucradas, cesen de aplicarse. Calculamos un valor esperado, o desviación estándar, o integral y, aunque habitualmente se puede confiar en estos cálculos, ahora abruptamente se vuelven erróneos o insatisfactorios, o incluso sin sentido.

Todo los ejemplos mencionados no son ocurrencias estrafalarias, sino casos genuinos que aparecen de vez en cuando. Una integral que realmente produce un valor, puede hacerse errónea por su "no existencia" o puede mostrar mal comportamiento y volverse poco fiable como consecuencia de una decisión dependiente de la trayectoria. Un valor esperado o una desviación estándar pueden también cruzarse con el problema de su no existencia, o dejar de ser finita y resultar así inaceptable. Los buenos programas de computación a veces replican a tales cálculos con la advertencia: **NaN**. Esto significa: *Not a Number*. Dividir cero por cero, en particular, es una de tales operaciones sin sentido. Pero uno quizá no se percatará de un caso así, si tropieza con él inadvertidamente: por ejemplo, manejando una distribución de Pareto que en ciertas circunstancias carezca de un parámetro necesario o tenga uno infinito.

Pero estos problemas son superables si los manejamos con tino. Un buen consejo es: "inspeccionar su contenido y circunstancias". Ya habló Schumpeter sobre el lado destructivo de la creación. Esto puede tener dos lecturas e interpretaciones. La primera es relativamente simple: es la propia competencia la que pone en peligro a los competidores. Puede poner en peligro su cuota de mercado, puede dificultar sus hábitos de precios, y finalmente puede también abocarlos a una completa bancarrota bajo ciertas condiciones. La segunda lectura es menos conocida, pero es el núcleo de lo que Schumpeter leyó en Marx. Como es habitual en economía: cada avance y ganancia proyectan su propia sombra. Las mejoras, las ingeniosas innovaciones que ahorran trabajo y capital incrementarán la productividad del sistema económico. Por tanto, incrementar la productividad puede producir desempleo. O conllevar una producción más barata y disminuir el valor del capital invertido que ahora puede ser reproducido más barato. Así, un incremento de la productividad del 3 por ciento anual hundirá o reducirá a la mitad los puestos de trabajo y el valor del capital existente en el lapso de cada 22 o 23 años. Hará a sus propietarios la mitad de ricos de lo que eran dos décadas antes y finalmente puede generar desempleo para los que fueron demasiado productivos. Esto es también destrucción: una erosión constante y fuertemente sentida de los puestos de trabajo y del capital acumulado. O más bien — porque tales pérdidas no figuran en la estadística y no son restadas en los libros de contabilidad— aparecen como una sorpresa y turbulencia al final de cada ciclo de producción, cuando la bolsa, querámoslo o no, reacciona a la caída de la riqueza sobrevenida aparentemente de la nada, y que en realidad no se sabe a quién golpea y con qué fuerza.

CONCLUSIÓN

Ricardo y Von Neumann propusieron condiciones demasiado estrictas para la existencia de equilibrio general. Ambos asumieron completa igualación de todos los rendimientos en los productos y procesos, así como el bloqueo de cualquier transferencia adicional de capital. Esta estructura es clara y precisa, y ciertamente no puede ser rechazada por ningún motivo teórico. Pero una economía real es incapaz de satisfacerla. Éste es un estado que nunca será alcanzado por ningún sistema existente. Además de no ser factible, tampoco es razonable. Si este objetivo fuera satisfecho, el movimiento real de la economía se detendría y se paralizaría por completo. Esto significaría que no hay ninguna posibilidad de cambio para mejor; ningún desarrollo adicional sería posible.

Leontief (y más tarde Sraffa) establecieron un objetivo mucho más modesto. El sistema debe moverse sobre un camino práctico que pueda mantenerse. Ésta, también, es una propuesta clara y aceptable. Admite la igualación o casi igualdad del tipo de beneficios, o incluso una disminución de su nivel, pero no la convierte en obligatoria en tanto que los mercados continúen siendo funcionales. No busca imponer iguales los beneficios en las varias ramas y generalmente se satisfará a sí misma mientras la producción se mueva en la vía habitual. Ésta es una estipulación "*business as usual*".

Al lector corresponde decidir cómo quiere llamar a este tipo de comportamiento. Puede etiquetarlo como equilibrio, incluso si no se cumplen todas las exigencias del equilibrio verdadero y clásico. Pero el comportamiento no excluye algún tipo de actuación óptima y requiere sólo una continuación "normal". Habrá economistas que llamarán a esto simplemente "vegetar", o sea pura vida de planta. Claro está que un sistema natural de ese carácter por lo general no sólo sobrevive, sino que a menudo también se desarrolla. Al parecer, la naturaleza no tiene un "interés" claro, aparte de la supervivencia, y dicha supervivencia puede ir acompañada de desarrollos maravillosos.⁹

Entre las dos formas de desarrollo encontramos la teoría de los procesos óptimos de Pontryagin que requiere la constancia de una forma hamiltoniana investigada más profundamente por Dobos (2009).

BIBLIOGRAFÍA

Barone, Enrico (1935): "The Ministry of Production in the Collectivist State" en F. A. von Hayek (ed.) *Collectivist Economic Planning*, Londres: Routledge & Sons, pp. 245–290. <http://mises.org/document/3581/Collectivist-Economic-Planning>. En castellano

⁹ Esto está explicado e ilustrado en el ensayo de J. Fodor (2009). Aunque la naturaleza en su conjunto no tiene ningún objetivo propio, las especies están fuertemente interesadas en cooperar y sobrevivir. La persistencia de la reproducción ampliada cuando está en riesgo la propia supervivencia (por ejemplo, porque el "nicho" preparado para la vida roza sus límites o está en peligro) es cuestión compleja que requeriría un examen más profundo.

A. Bródy

como "El ministro de la producción en un estado colectivista" en Segura, J. y Rodríguez-Braun, C. (eds.) *La Economía en sus textos*, Taurus: Madrid 1998.

Carathéodory, Constantin (1909): "Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik", *Mathematische Annalen*, 67, pp. 355-386.
<http://www.nd.edu/~powers/ame.20231/caratheodory1909.pdf>

Dobos, Imre (2009): "Dinamikus optimalizálás és a Leontief-modell" [Optimización dinámica y el modelo Leontief], *Közgazdasági Szemle*, 56 (enero), pp. 84-92.
<http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/312/>

Fodor, Jerry (2009): "Against Darwinism", *Mind and Language*, 23, 1, pp. 1-24 (2008)
http://rucss.rutgers.edu/faculty/Fodor/Fodor_Against_Darwinism.pdf

Gibbs, Josiah W. (1875-78): "On the Equilibrium of Heterogeneous Substances", *Transactions of the Connecticut Academy*, varios números desde 1875 a 1878.
http://web.mit.edu/jwk/www/docs/Gibbs1875-1878-Equilibrium_of_Heterogeneous_Substances.pdf

Hayek, Friedrich A. von (1935): "Szocialista kalkuláció II. A vita állása" [El cálculo socialista II. El estado del Debate] en A. Madarász, (ed.) *Piac és szabadság. Válogatott tanulmányok* [Mercado y libertad. Estudios selectos], Budapest: Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1995, pp. 179-202.

Lange, Oskar (1936): "On the Economic Theory of Socialism I-II" en T. Kowalik (ed.) *Economic Theory and Market Socialism. Selected Essays of Oskar Lange*, Edward Elgar, 1994, pp. 252-290. <http://www.jstor.org/stable/2967660> y <http://www.jstor.org/stable/2967609>. En castellano en E. B. Lippincott (ed.) *Sobre la teoría económica del socialismo*, Barcelona: Ariel 1981.

Leontief, Wassily (1966): *Input-Output Economics*, New York: Oxford University Press. Parcialmente en <http://books.google.es/books?id=hBDEXblq6HsC>. En castellano como *Análisis económico input-output*, Barcelona: Orbis 1984.

Neumann, John von (1945): "A Model of General Economic Equilibrium", *The Review of Economic Studies*, 13(1), pp. 1-9. <http://www.jstor.org/stable/2296111>. En castellano como "Un modelo de equilibrio económico general" en J. Segura y C. Rodríguez-Braun (eds.) *La Economía en sus textos*, Madrid: Taurus, 1998.

Schumpeter, Joseph A. (1942): "Creative Destruction" en *Capitalism, Socialism and Democracy*, New York: Harper, 1975, pp. 82-85. <http://sergioberumen.files.wordpress.com/2010/08/schumpeter-joseph-a-capitalism-socialism-and-democracy.pdf>. En castellano como *Capitalismo, socialismo y democracia*, Madrid: Aguilar, 1971.

Sraffa, Piero (1960): *Production of Commodities by Means of Commodities: Prelude to a Critique of Economic Theory*, Cambridge: Cambridge University Press.
<http://laprimaradice.myblog.it/media/02/02/2829581832.pdf>.
En castellano como *Producción de mercancías por medio de mercancías*, Barcelona: Oikos-Tau, 1966.